

Eléments de solution

Solution 1 Le raisonnement par récurrence n'est pas obligatoire dans 1.

- $2^{3n} - 1 = (2^3)^n - 1 = 8^n - 1 = (8 - 1)(8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 8 + 1) = 7k$
 $2^{3n+1} - 2 = 2 \times (2^{3n} - 1)$ est donc multiple de 7.
 $2^{3n+2} - 4 = 2^2 \times (2^{3n} - 1)$ est donc multiple de 7.
- Si $p \in \mathbb{N} : p = 3n$ ou $p = 3n + 1$ ou $p = 3n + 2$ (division euclidienne de p par 3)
 - $p = 3n \Rightarrow 2^p = 2^{3n} \equiv 1$ [7] d'après 1.
 - $p = 3n + 1 \Rightarrow 2^p = 2^{3n+1} = 2 \times 2^{3n} \equiv 2 \times 1 = 2$ [7]
 - $p = 3n + 2 \Rightarrow 2^p = 2^{3n+2} = 4 \times 2^{3n} \equiv 4 \times 1 = 4$ [7]
Les restes possibles sont donc 1, 2 et 4.
- $p = 3n \Rightarrow A_p = 2^{3n} + 2^{6n} + 2^{9n} \equiv 1 + 1 + 1 = 3$ [7]
 - $p = 3n + 1 \Rightarrow A_p = 2 \times 2^{3n} + 4 \times 2^{6n} + 8 \times 2^{9n} \equiv 2 \times 1 + 4 \times 1 + 8 \times 1 = 14 \equiv 0$ [7]
 - $p = 3n + 2 \Rightarrow A_p = 4 \times 2^{3n} + 16 \times 2^{6n} + 64 \times 2^{9n} \equiv 4 \times 1 + 16 \times 1 + 64 \times 1 = 84 \equiv 0$ [7]
Donc A_p est divisible par 7 sauf si $p = 3n$
- $a = A_3$ n'est pas divisible par 7. et $b = A_4$ est divisible par 7.

Solution 2

- $1^3 = 1 ; j^3 = (e^{2i\pi/3})^3 = e^{2i\pi} = 1$ et $(j^2)^3 = j^6 = (j^3)^2 = 1$
 - $(1 - j)(1 + j + j^2) = 1 - j^3 = 0 \Rightarrow 1 + j + j^2 = 0$ car $1 - j \neq 0$
 - $e^{i\pi/3} + j^2 = e^{i\pi/3} + e^{4i\pi/3} = e^{i\pi/3}(1 + e^{i\pi}) = 0$ car $e^{i\pi} = -1$
- ABC est équilatéral direct si et seulement si $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
conditions successivement équivalentes à :
 $|b - a| = |c - a|$ et $\arg \frac{c-a}{b-a} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
 $\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = 1$ et $\arg \frac{c-a}{b-a} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
 $\frac{c-a}{b-a}$ complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{3}$
 $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$
 - ABC équilatéral direct si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3} = -e^{i\pi} e^{i\pi/3} = -e^{4i\pi/3} = -j^2$
 $c - a = -j^2(b - a) \Leftrightarrow -a(1 + j^2) + bj^2 + c = 0 \Leftrightarrow aj + bj^2 + c = 0$
Après multiplication par $j^2 : a + bj + cj^2 = 0$
- $M \neq M' \Leftrightarrow z \neq \bar{z} \Leftrightarrow z \notin \mathbb{R}$

(b) $RM M'$ équilatéral direct si et seulement si $1 + zj + \bar{z}j^2 = 0$ d'après 2.

En posant $z = x + iy$ on trouve $x + y\sqrt{3} - 1 = 0$.

(Δ) est donc la droite d'équation $x + y\sqrt{3} - 1 = 0$ privée du point $(1; 3)$ car si $x = 1, y = 0$ et alors $z \in \mathbb{R}$

Solution 3

1. Sur tout intervalle ne contenant pas $\frac{\pi}{2} + k\pi : (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$I = [\tan x]_0^{\pi/4} = 1$$

2.

(a) f est quotient de fonctions dérivables sur $[0; \frac{\pi}{4}]$, le dénominateur ne s'annulant en aucun point de $[0; \frac{\pi}{4}]$.

donc f est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{4}]$

$$f'(x) = \frac{\cos^4 x - \sin x(-3 \cos^2 x \sin x)}{\cos^6 x} = \frac{\cos^2 x + 3 \sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 3(1 - \cos^2 x)}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$$

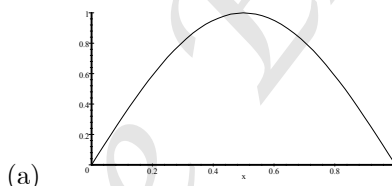
(b) $\int_0^{\pi/4} f'(x) dx = [f(x)]_0^{\pi/4} = f(\frac{\pi}{4}) - f(0) = 2$

Donc $3 \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x} - 2 \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = 2$

D'où $3J - 2I = 2$. Or $I = 1$. Donc $J = \frac{4}{3}$

Solution 4

1.



(b) $I = [-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x)]_0^1 = \frac{2}{\pi}$

(c) I représente, en unités d'aire (ici 64 cm²), l'aire de la surface délimitée par la courbe et l'axe des abscisses.

2.

(a) S_n représente la somme des aires, en unités d'aire, des rectangles R_k avec $0 \leq k \leq n - 1$

(b) $1 + e^{i\pi/n} + e^{2i\pi/n} + \dots + e^{i(n-1)\pi/n} = \frac{1 - (e^{i\pi/n})^n}{1 - e^{i\pi/n}} = \frac{1 - e^{i\pi}}{1 - e^{i\pi/n}} = \frac{2}{1 - e^{i\pi/n}}$

(c) $\sin \frac{\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \text{Im} (1 + e^{i\pi/n} + e^{2i\pi/n} + \dots + e^{i(n-1)\pi/n}) = \text{Im} \frac{2}{1 - e^{i\pi/n}}$

Or $\frac{2}{1 - e^{i\pi/n}} = \frac{2}{e^{i\pi/2n} (e^{-i\pi/2n} - e^{i\pi/2n})} = \frac{2}{e^{i\pi/2n} (-2i \sin \frac{\pi}{2n})} = \frac{e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n})}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$

Donc $\text{Im} \left(\frac{2}{1 - e^{i\pi/n}} \right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n})}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$

(d) $S_n = \frac{1}{n} \left[\sin 0 + \sin \frac{\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right] = \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{\pi} \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}}$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2}{\pi}$

(e) L'aire de la surface délimitée par la courbe et l'axe des abscisses est la limite de la somme des aires des rectangles lorsque le nombre de ces rectangles augmente indéfiniment.