Eléments de solution

Solution 1 **1.** $c' = \frac{-ic-2}{c+1} = \frac{-3}{-i+1} = -\frac{3}{2}(1+i)$

2. $\frac{1}{2} = \frac{-i.d-2}{d+1} \Rightarrow d+1 = -2i.d-4 \Rightarrow d = \frac{-5}{1+2i} = \frac{-5(1-2i)}{5} = -1+2i$
3.(a) $\rho\rho' = |z+1|\,|z'+i| = |z+1|\left|\frac{-iz-2}{z+1}+1\right| = |z+1|\left|\frac{-2+i}{z+1}\right| = |-2+i| = \sqrt{5}.$
(b) $M \in (\Gamma) \Rightarrow AM = 2 \Rightarrow |z-a| = 2 \Rightarrow |z+1| = 2$
donc $|z'+i| = \frac{\sqrt{5}}{|z+1|} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{5}}{2}$
Donc $M \in (\Gamma')$ cercle de centre C de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$
4. **(a)** $\arg\omega = \arg\frac{z-b}{z-a} = \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right)\ [2\pi]$
(b) $z' = \frac{-iz-2}{z+1} = \frac{-i(z-2i)}{z+1} = -i\omega$
(c) $z' \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow -iw \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(-iw) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \arg\omega = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\omega = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$
$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow ABM$ rectangle en $M \Leftrightarrow M \in (F)$ cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B.
(d) $AD = |d-a| = |2i| = 2 \Rightarrow D \in (\Gamma)$
$\overrightarrow{AD}$ a pour affixe $d-a = 2i$ et $\overrightarrow{BD}$ a pour affixe $d-b = -1$.
Donc $\overrightarrow{AD}(0,2)$ et $\overrightarrow{BD}(-1,0)$ puis $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD} = 0$. Donc $D \in (F)$

Solution 2 **1.** **(a)** $S_{(AO)} \circ S_{(AB)} = R_{A,\pi/2} = R_A$ car $(AO) = R_{A,\pi/4}(AB)$

(b) $R_A = S_{\Delta_1} \circ S_{(AB)}$ avec $\Delta_1 = R_{A,\pi/4}(AB) = (AO)$
$R_B = S_{(AB)} \circ S_{\Delta_2}$ avec $\Delta_2 = R_{B,-\pi/4}(AB) = (OB)$.
Donc $R_A \circ R_B = S_{(AO)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(OB)} = S_{(AO)} \circ S_{(OB)} = R_{o,\pi} = S_O$
2. **(a)** $R_B(E) = C \Rightarrow R_A \circ R_B(E) = R_A(C) = G$
(b) D'après **(a)** et **1b** $S_O(E) = G$. Donc O milieu de $[EG]$.
(c) $R_F \circ S_O \circ R_D(C) = R_F \circ S_O(E) = R_F(G) = C$
$R_F \circ S_O \circ R_D$ est un déplacement admettant C pour point fixe.
C'est donc une rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi$.
Donc $R_F \circ S_O \circ R_D = \mathrm{Id}$
(d) $R_F \circ S_O \circ R_D(D) = D \Rightarrow R_F \circ S_O(D) = D \Rightarrow R_F(H) = D$
Le triangle FDH est rectangle en F et O est milieu de l'hypoténuse DH.
Un triangle rectangle étant inscriptible dans un demi-cercle de diamètre l'hypoténuse, $OF = OD$.
De plus $R_F(H) = D \Rightarrow FH = FD$ et donc FO, médiane, est également hauteur de FDH.

Solution 3 **Partie A**

1. **(a)** $\Delta : y = x - 1$
(b) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$		$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

(c) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f(x) \geq 0 \Rightarrow x - 1 \geq \ln x \Rightarrow \Delta$ au dessus de C.
2. **(a)** $x - 1 - \ln x$ est minimal lorsque $x = 1$ et vaut alors 0.
Donc $x - \ln x$ est minimal lorsque $x = 1$ et vaut alors 1.
(b) D est au dessus de Δ donc de C. D'où $MN = x - \ln x$ (unités de longueur)
Donc la valeur minimale de MN est 1 unité de longueur soit 4 cm.
Partie B
1.$OM = \sqrt{x^2 + \ln^2 x}$
2. **(a)** $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

$u'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{1+2x^2}{x} > 0$ sur $]0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$u'(x)$	$\|$	$+$	
$u(x)$	$\|_{-\infty}$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) u est dérivable et strictement croissante sur $[0,5;1]$ et $u(0,5) < 0$ et $u(1) > 0$.
donc l'équation $u(x) = 0$ possède une et une seule solution dans $]0,5;1[$.
De plus, les variations de u montrent que la même équation ne possède pas de solution dans chacun des intervalles $]0;0,5[$ et $]1;+\infty[$.
Plus précisément, puisque $u(0,65) < 0$ et $u(0,66) > 0$: $0,65 < \alpha < 0,66$
(c) D'après **2b.**

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

3. g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[$: $g'(x) = 2x + 2(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{2u(x)}{x}$
D'où

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|^{+\infty}$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. La plus courte distance OM est $\sqrt{g(\alpha)}$ unités de longueur soit $4\sqrt{g(\alpha)}$ cm.
$u(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \ln\alpha = 0 \Rightarrow g(\alpha) = \alpha^2 + \left(-\alpha^2\right)^2 = \alpha^4 + \alpha^2 \Rightarrow \sqrt{g(\alpha)} = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$
En prenant $0,655$ comme valeur approchée de α on obtient : 3,15 cm à 10^{-2} près.
5. La tangente en A à C a pour pente $p = \frac{1}{\alpha}$ et (OA) a pour pente $p' = \frac{\ln\alpha}{\alpha}$.
$pp' = \frac{\ln^2\alpha}{\alpha} = -1$ car $\alpha^2 + \ln\alpha = 0$. D'où le résultat.