

Eléments de solution

Solution 1

2. Il suffit de montrer que B est image de a par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ c'est à dire que

$$z_B = e^{i\pi/3} z_A.$$

$$e^{i\pi/3} z_A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (3 - i\sqrt{3}) = 3 + i\sqrt{3} = z_B$$

$$z_G = \frac{1}{3}(z_0 + z_A + z_B) = 2$$

3.(a) $R(O) = G \Leftrightarrow a \cdot 0 + b = 2 \Rightarrow b = 2$

$$R(A) = C \Leftrightarrow a(3 - i\sqrt{3}) + b = 2 + \sqrt{3} + 3i \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3} + 3i}{3 - i\sqrt{3}} = i$$

(b) $z' = iz + 2$ et $|i| = 1$ donc R est une rotation d'angle $\arg i = \frac{\pi}{2}$ et de centre Ω d'affixe ω telle que $\omega = i\omega + 2$ soit $\omega = \frac{2}{1-i} = 1 + i$

(c) (GC) est l'image de (OA) par R et R est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $(OA) \perp (GC)$.

On a également $(OA) \perp (GB)$ car la médiane d'un triangle équilatéral est aussi hauteur. Donc $(GB) \parallel (GC)$ et G, B, C alignés.

(d) Si on pose $B' = R(B)$, l'image du triangle équilatéral direct OAB est le triangle équilatéral direct GCB' car R est un déplacement. B' est le point d'intersection des cercles de centres G et de centre C tous deux de rayon GC . Intersection choisie de sorte que GCB' soit direct.

4. (a) $f(O) = G \Leftrightarrow a'z_0 + b' = z_G \Leftrightarrow b' = 2$

$$f(A) = C \Leftrightarrow a'z_A + b' = z_C \Leftrightarrow a'(3 - i\sqrt{3}) + 2 = 2 + \sqrt{3} + 3i \Leftrightarrow a' = \frac{\sqrt{3} + 3i}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$$

$$I \text{ a pour affixe } \frac{z_0 + z_G}{2} = 1 \text{ donc } f(I) \text{ a pour affixe } a'(1) + b' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) + 2.$$

$f \circ f(O)$ a pour affixe $a' \neq 0$ donc $f \circ f \neq id$ et f n'est pas une réflexion.

(b) Si on pose $B'' = f(B)$, l'image du triangle équilatéral direct OAB est le triangle équilatéral indirect GCB'' car f est un antidéplacement. B'' est le point d'intersection des cercles de centres G et de centre C tous deux de rayon GC . Intersection choisie de sorte que GCB'' soit indirect.

Solution 2

1 (a) $z_1 = az_0 = 3 + 3i\sqrt{3}$ et $a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

$$z_1 = 6 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6e^{i\pi/3} \text{ et } a^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}e^{i\pi/6}$$

(b) $z_3 = a^3 z_0 = a^2 a z_0 = a^2 z_1 = 6e^{i\pi/3} \frac{1}{2}e^{i\pi/6} = 3e^{i\pi/2}$

$$z_7 = a^7 z_0 = a^6 a z_0 = a^6 z_1 = (a^2)^3 z_1 = \left(\frac{1}{2}e^{i\pi/6}\right)^3 6e^{i\pi/3} = \frac{3}{4}e^{i5\pi/6}$$

2. (a) $|z_n| = |a|^n |z_0| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n (6\sqrt{2}) = 12 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$

(b) (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 6\sqrt{2}$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$ car $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

La distance du point A_n au point O peut être aussi petite que l'on veut, à condition de choisir n suffisamment grand

(d) $OA_p = r_p = |z_p|$

$$OA_p \leq 10^{-3} \Leftrightarrow |z_p| \leq 10^{-3} \Leftrightarrow 12 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{p+1} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \ln 12 + (p+1) \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \ln 10^{-3}$$

D'où, puisque $\ln \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$: $p+1 \geq \frac{\ln 10^{-3} - \ln 12}{\ln \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 \ln 12000}{\ln 2} = 27.101$ d'où $p \geq 26$, 1..et donc $p = 27$

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_p}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_{27}}\right) = \arg z_{27} = \arg a^{27} + \arg z_0 = 27 \arg a + \arg z_0 = 27 \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = 5 \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Remarque : $\arg a = \frac{\pi}{12}$ car $\arg a^2 = \frac{\pi}{6}$ et $\arg a^2 = 2 \arg a$

Solution 3

1. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \mu \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2\mu \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2\mu e^x$ après multiplication par e^x .
 $e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2\mu t - 1 = 0 \\ t = e^x \end{cases}$

L'équation $t^2 - 2\mu t - 1 = 0$ possède deux solutions de signes contraires (l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède deux solutions de signes contraires lorsque a et c sont de signes contraires car alors : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ et les deux solutions x_1, x_2 vérifient $x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0$).

Une seule solution étant strictement positive, l'équation $t = e^x$ possède une seule solution.

Les calculs donnent $\Delta = 4(1 + \mu^2)$ et $t_1 = \mu - \sqrt{1 + \mu^2} < 0$; $t_2 = \mu + \sqrt{1 + \mu^2} > 0$

Donc $e^x = \mu + \sqrt{1 + \mu^2}$ et $x = \ln(\mu + \sqrt{1 + \mu^2})$.

2. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

(b) f est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

$\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

3. (a) (T) a pour équation $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ soit : $y = x$

(b) d est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R} :$

$$d'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) = \frac{e^{-x}}{2}(e^{2x} + 1 - 2e^x) = \frac{e^{-x}}{2}(e^x + 1)^2.$$

$d' \geq 0$ sur \mathbb{R} donc d est croissante sur \mathbb{R}

Or $d(0) = 0$. Donc $d \geq 0$ sur \mathbb{R}_+ et $d \leq 0$ sur \mathbb{R}_-

D'où (C) au dessus de (T) sur \mathbb{R}_+ et en dessous sur \mathbb{R}_-

4. L'aire demandée vaut, en unités d'aire :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx = \int_0^1 [f(x) - x] dx = \left[\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} - 3 \right)$$

Remarque : C'est l'aire du secteur délimité par (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ diminuée de l'aire du triangle OIK où $I(1;0)$ et $K(1;1)$.

L'unité d'aire valant 4 cm^2 : $\mathcal{A} = 2 \left(e + \frac{1}{e} - 3 \right) \text{ cm}^2$