

Solution 1

1. Pour $z \neq 1$, on a $z \frac{z-2}{z-1} = z \Leftrightarrow z-2 = z(z-1) \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$
 Cette équation admet deux solutions : $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
2. Pour $z \neq 1$, $\frac{z-2}{z-1} = i \Leftrightarrow z-2 = i(z-1) \Leftrightarrow z = \frac{2-i}{1-i} = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$
3. (a) $\left| \frac{z-2}{z-1} \right| = \frac{BM}{AM}$ et $\arg\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$.
 (b) Sachant que i a pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{2}$, l'équation (2) équivaut à $\frac{BM}{AM} = 1$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
 Ceci entraîne que M appartient à la médiatrice de $[AB]$ et que M appartient au demi-cercle de diamètre $[AB]$ situé dans la partie du plan définie par $y \geq 0$. L'intersection de ces deux ensembles redonne bien géométriquement le point d'affixe $\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$.
4. (a) $1 = |i| = \left| \left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n \right| = \left| \frac{z-2}{z-1} \right|^n = \left(\frac{BM}{AM}\right)^n$.
 Comme $\frac{BM}{AM}$ est un réel positif, on en déduit que $\frac{BM}{AM} = 1$, donc que M appartient à la médiatrice de $[AB]$, et donc que M a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.
 (b) Pour $z \neq 1$, $\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i \Leftrightarrow (z-2)^2 = i(z-1)^2 \Leftrightarrow (1-i)z^2 + (2i-4)z + 4-i = 0$
 On pose alors $z = \frac{3}{2} + iy$, ce qui donne l'équation $\frac{1}{4} - iy - y^2 + iy^2 + y + \frac{3}{4}i - i = 0$
 L'annulation des parties réelle et imaginaire entraîne que $y^2 - y - \frac{1}{4} = 0$
 d'où après résolution l'ensemble des solutions $S = \left\{ \frac{3}{2} + i\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right), \frac{3}{2} + i\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$

Solution 2 L'énoncé suggère de confondre transformation du plan et transformation complexe associée.

1. (a) $\forall z \in \mathbb{C} : f \circ f(z) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\overline{f(z)}\right) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[\overline{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z}\right]$
 $= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z = z$
- (b) $f = R \circ S$ avec $R(z) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z = e^{i\frac{\pi}{3}} z$ et $S(z) = \bar{z}$.
 R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et S la réflexion d'axe (Ox) .
- (c) $R = S_{D_1} \circ S$ avec D_1 image de (Ox) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$
 D'où $f = R \circ S = S_{D_1} \circ S \circ S = S_{D_1}$
2. (a) Si $z = x + iy$ et $z'' = x'' + iy''$:
 $z'' = x'' + iy'' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (x - iy) - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 Donc $\begin{cases} x'' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
 $M(x, y)$ invariant par $g \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x - y\sqrt{3} + 1 = 0$
 L'ensemble des points invariants est la droite d'équation $x - y\sqrt{3} + 1 = 0$
- (b) $g = T \circ f$ avec $T(z) = z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 T est donc la translation de vecteur \vec{t} d'affixe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (c) $(\vec{u}, \vec{t}) = \arg\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ donc \vec{t} est normal à D_1 .
 D'où $T = S_{D_2} \circ S_{D_1}$ avec D_2 image de D_1 par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{t}$
 Alors $g = T \circ f = S_{D_2} \circ S_{D_1} \circ S_{D_1} = S_{D_2}$
- (d) $g(A)$ a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 A est donc invariant par g et D_2 est donc la droite passant par A et parallèle à D_1 (donc normale à \vec{t})

Solution 3

1. (a) $I = \int_0^\pi \cos^4 x \, dx = \int_0^\pi \cos^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx = \int_0^\pi \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) \, dx$
- (b) En posant $u(x) = \cos x$ et $v'(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$ on a :
 $u'(x) = -\sin x$ et $v(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$ d'où
 $I = [\cos x (\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x)]_0^\pi - \int_0^\pi (-\sin^2 x + \frac{1}{3} \sin^4 x) \, dx = \int_0^\pi \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3} J$
- (c) $J = \int_0^\pi \sin^4 x \, dx = \int_0^\pi \sin^2 x (1 - \cos^2 x) \, dx = \int_0^\pi \sin x (\sin x - \sin x \cos^2 x) \, dx$
En posant $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = (\sin x - \sin x \cos^2 x)$ on a
 $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$ d'où
 $J = [\sin x (-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x)]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos^2 x + \frac{1}{3} \cos^4 x) \, dx = \int_0^\pi \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3} I$
2. (a) $I + J = \int_0^\pi (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx - \frac{1}{3} (I + J) = \pi - \frac{1}{3} (I + J) \Rightarrow I + J = \frac{3\pi}{4}$
- (b) $J - I = \int_0^\pi (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx - \frac{1}{3} (I - J) = \int_0^\pi \cos 2x \, dx - \frac{1}{3} (I - J)$
d'où $J - I = -\frac{1}{3} (I - J)$ puis $J - I = 0$
- (c) $I = J = \frac{3\pi}{8}$