



## Eléments de solution

### Exercice 1

1. (a)  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  et  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$   
 (b) Le vecteur  $\vec{n}$  est normal au plan  $\mathcal{P}$  contenant  $A, B, C$ .  
 $M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z + 2 = 0$
2. (a)  $\vec{n}(0, 1, 0)$  est normal à  $Q$ , et  $\vec{n}'(1, 1, -3)$  est normal à  $Q'$ .  
 $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  n'étant pas colinéaires,  $Q$  et  $Q'$  ne sont pas parallèles, donc sécants.  
 (b)  $M(x, y, z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z - 2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k - 2 \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$  avec  $k \in \mathbb{R}$   
 Représentation paramétrique d'une droite passant par  $E(-2, 0, 0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(3, 0, 1)$ .
3.  $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow IM^2 = 4 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$

4. Equation paramétrique de la droite  $(JK)$  :  $\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$  avec  $k \in \mathbb{R}$

$$M(x, y, z) \in S \cap (JK) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = 0 \\ z = k \\ x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 2z - 2 = 0 \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

D'où  $(-2 + 3k)^2 + 0^2 - 2 \times 0 + k^2 + 2k - 2 = 0 \Leftrightarrow 10k^2 - 10k + 2 = 0$

On trouve deux valeurs pour  $k$  :  $k_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5}$  et  $k_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5}$

Il existe donc deux points d'intersection :  $I_1 \left( \begin{matrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5} \end{matrix} \right)$  et  $I_2 \left( \begin{matrix} -\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5} \\ 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5} \end{matrix} \right)$

### Exercice 2

1.  $P(i\sqrt{3}) = P(-i\sqrt{3}) = 0$ . Il existe donc un polynôme  $Q$  de degré 2, tel que

$$P(z) = (z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3})Q(z) = (z^2 + 3)Q(z)$$

Par la méthode des coefficients indéterminés, on trouve :  $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$

2.  $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + 3 = 0$  ou  $z^2 - 6z + 21 = 0$ . On trouve :

$$S = \{i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, 3 + 2i\sqrt{3}, 3 - 2i\sqrt{3}\}$$

3. D'après le graphique, il semble que le cercle cherché ait pour diamètre  $[CD]$ . Appelons  $\Omega$  le milieu de  $[CD]$ , d'affixe 3. On a alors :  $\Omega A = |i\sqrt{3} - 3| = \sqrt{3 + 9} = 2\sqrt{3}$   
 De même :  $\Omega B = \Omega C = \Omega D = 2\sqrt{3}$ , ce qui prouve bien que les quatre points sont situés sur le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $\sqrt{3}$ .

4.  $E$  est l'image de  $D$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\pi$ , donc son affixe est  $z_E = e^{i\pi} z_D = -3 + 2i\sqrt{3}$   
 Donc  $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})}{(-1 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$   
 $\frac{BC}{BE} = \frac{|z_C - z_B|}{|z_E - z_B|} = \left| \frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} \right| = |e^{-i\frac{\pi}{3}}| = 1$ . Donc le triangle  $BEC$  est isocèle.  
 $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = \arg e^{-i\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{3}$ . Donc le triangle  $BEC$  est équilatéral.

**Exercice 3**

- Par divisions euclidiennes successives (algorithme d'Euclide) :  
 $3\ 024 = 2\ 688 \times 1 + 336$  et  $2\ 688 = 336 \times 8 + 0$ .  
 Le dernier reste non nul est 336 qui est donc PGCD (2 688 ; 3 024).
- (a) En divisant les deux membres de l'équation (1) par 336 on obtient (2).  
 (b) Vérification immédiate :  $8 \times 1 + 9 \times (-2) = -10$ .  
 (c) De l'équation (2) et de l'égalité ci-dessus on déduit par différence membre à membre :

$$8(x - 1) + 9(y + 2) = 0.$$

Soit  $8(x - 1) = -9(y + 2)$ .

$$\left. \begin{array}{l} 9 \mid 8(x - 1) \\ 9 \wedge 8 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 9 \mid (x - 1) \text{ d'après le théorème de Gauss.}$$

Donc il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x - 1 = 9k$  soit  $x = 1 + 9k$

D'où  $8(x - 1) = -9(y + 2) \Rightarrow 8 \times 9k = -9(y + 2) \Rightarrow y + 2 = -8k$

Les solutions de (2) sont donc les couples d'entiers relatifs  $(1 + 9k; -2 - 8k)$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

- (a)  $\vec{n}_P(1; 2; -1)$  est normal à  $\mathcal{P}$   
 $\vec{n}_Q(3; -1; 5)$  est normal à  $\mathcal{Q}$ .  
 $\vec{n}_P$  et  $\vec{n}_Q$  ne sont pas colinéaires. Donc  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  ne sont pas parallèles et donc sécants selon une droite.  
 (b)  $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \Rightarrow 5(x + 2y - z) + 3x - y + 5z = -10 \Rightarrow 8x + 9y = -10$ .  
 Donc tout point de  $\mathcal{D}$  a ses coordonnées qui vérifient la relation (2).  
 (c) Un point de  $\mathcal{D}$  à coordonnées entières a nécessairement pour abscisse  $1 + 9k$ , pour ordonnée  $-2 - 8k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ , d'après 2.c.  
 C'est un point de  $\mathcal{P}$ . Donc  $z$  vérifie l'équation  $1 + 9k - 4 - 16k - z = -2$ .  
 Soit  $z = -1 - 7k$ .  
 On vérifie que les points de coordonnées  $(1 + 9k, -2 - 8k, -1 - 7k)$  appartiennent aussi à  $\mathcal{Q}$ .  
 On peut conclure :  
 les points de  $\mathcal{E}$  à coordonnées entières ont pour coordonnées  $(1 - 9k, -2 + 8k, -1 + 7k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 4**

**PARTIE A**

- $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$   
 De même :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $f$  est dérivable  $]0; +\infty[$ , et  $\forall x \in ]0; +\infty[ : f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x} - 1} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} - 1)}$   
 $x > 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} > 1 \Rightarrow f'(x) > 0$  sur  $]0; +\infty[$ , donc  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .
- $f(3) = 0 \Rightarrow A(3; 0)$ . On a  $B\left(\frac{5}{4}, -\ln 2\right)$   $P\left(\frac{5}{4}, 0\right)$   $H(0, -\ln 2)$

**PARTIE B**

1. (a)  $z' = e^{i\frac{\pi}{2}} z = iz \Leftrightarrow x' + iy' = i(x + iy) = -y + ix \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}$

(b) D'après (a) :  $A'(0, 3) \quad B'\left(\ln 2, \frac{5}{4}\right) \quad P'\left(0, \frac{5}{4}\right)$

2.  $M(x; y) \in C \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln(\sqrt{1+x} - 1) \Leftrightarrow -x' = \ln(\sqrt{1+y'} - 1)$

$\Leftrightarrow e^{-x'} = \sqrt{1+y'} - 1 \Leftrightarrow e^{-x'} + 1 = \sqrt{1+y'} \Leftrightarrow (e^{-x'} + 1)^2 = 1 + y'$

$\Leftrightarrow y' = -1 + (e^{-x'} + 1)^2 \Leftrightarrow y' = e^{-2x'} + 2e^{-x'} = g(x') \Leftrightarrow M'(x'; y') \in \Gamma$

**PARTIE C**

1.  $\int_0^{\ln 2} g(x) dx = \int_0^{\ln 2} (e^{-2x} + 2e^{-x}) dx = \left[ -\frac{e^{-2x}}{2} - 2e^{-x} \right]_0^{\ln 2} = \frac{11}{8}$

$g$  est dérivable et à valeurs positives sur  $[0, \ln 2]$ , donc l'intégrale est égale à l'aire, mesurée en unités d'aire, du domaine plan limité par  $\Gamma$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = \ln 2$ .

2. (a) La rotation  $r$  transforme  $A$  en  $A'$ ,  $P$  en  $P'$ ,  $C$  en  $\Gamma$ ,  $B$  en  $B'$ , l'axe des ordonnées en l'axe des abscisses. Par conséquent, le domaine plan  $D$  a pour image par cette rotation le domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe  $\Gamma$ , et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = \ln 2$ .

Donc l'aire cherchée est égale à l'intégrale précédente, c'est à dire à  $\frac{11}{8}$ .

(b) On remarque que l'opposé de l'intégrale est égale, en unités d'aire, à l'aire du domaine plan limité par la courbe  $C$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équation  $x = \frac{5}{4}$  et  $x = 3$ .

D'après la question précédente, on a, en désignant par  $A(OPHB)$  l'aire du rectangle  $OPHB$

:  

$$I = \int_{\frac{5}{4}}^3 \ln(\sqrt{1+x} - 1) dx = -(A - A(OPHB)) = -A + OP \times OH = -\frac{11}{8} + 5 \frac{\ln 2}{4}$$