

Dérivation (rappels et compléments)

1 Nombre dérivé

Définition 1 f est dérivable en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est un nombre réel. Cette limite est le nombre dérivé en a de f et se note $f'(a)$. On a alors :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Théorème 1 Le coefficient directeur (ou pente) de la tangente à la courbe \mathcal{C} représentative de f au point $A(a; f(a))$ est $f'(a)$.

Théorème 2 La tangente à la courbe \mathcal{C} représentative de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

2 Fonction dérivée

Si une fonction f est dérivable en tout point d'un intervalle I , on dit que f est dérivable sur I et l'application qui, à tout point de I associe le nombre dérivé de f en ce point est appelée fonction dérivée de f . On la note f' .

Théorème 3 Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I :

$u + v$ est dérivable sur I	et	$(u + v)' = u' + v'$
$u.v$ est dérivable sur I	et	$(uv)' = u'v + uv'$
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, λu est dérivable sur I	et	$(\lambda u)' = \lambda u'$
Si u ne s'annule pas sur I , $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I	et	$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$
Si v ne s'annule pas sur I , $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I	et	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Théorème 4 Si u est une fonction dérivable sur l'intervalle I , si f est une fonction dérivable sur l'intervalle J , si pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$,

Alors $f \circ u$ est dérivable sur I et $(f \circ u)' = (f' \circ u) \cdot u'$

Exemple 1 Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle, alors \sqrt{u} est dérivable sur I et

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Exemple 2 Si u est dérivable sur un intervalle I et si $n \in \mathbb{N}^*$, u^n est dérivable sur I et

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Remarque 1 Le théorème précédent reste valable si $n < 0$ à condition que u ne s'annule en aucun point de I .

3 Applications aux variations d'une fonction

Théorème 5 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I .
2. Si $f' > 0$ sur I , sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I .
3. Si $f' < 0$ sur I , sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante sur I .

4 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 6 Soit f une fonction dérivable et strictement croissante sur $[a; b]$, alors f réalise une bijection de $[a; b]$ sur $[f(a); f(b)]$

Soit f une fonction dérivable et strictement décroissante sur $[a; b]$, alors f réalise une bijection de $[a; b]$ sur $[f(b); f(a)]$.

Dans les deux cas, cela signifie que pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique comprise entre a et b .

Corollaire 1 Si f est dérivable et strictement monotone sur $[a; b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]a; b[$.

5 Compléments

Définition 2 Si $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est un nombre réel, on dit que f est dérivable à droite en a . La limite obtenue est appelée nombre dérivé à droite de f en a et se note $f'_+(a)$ ou $f'_d(a)$

On a alors $f'_+(a) = f'_d(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

La courbe représentative de f admet alors une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_+(a)$.

On définit de même le nombre dérivé à gauche.

Théorème 7 Pour qu'une fonction f soit dérivable en a , il faut qu'elle soit dérivable à gauche et à droite en a et que les nombres dérivés à gauche et à droite soient égaux

6 Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée
$f(x) = \lambda$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$