



Devoir 1

Exercice 1 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'unité 1 cm.

On considère l'équation

$$z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0 \quad (E)$$

- (a) Déterminer une solution réelle évidente z_1 de (E) .
(b) Déterminer les deux autres solutions de (E) , notées z_2 et z_3 .
- Soient M_1, M_2, M_3 les points ayant respectivement pour affixes z_1, z_2, z_3 .
 - Prouver que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.
 - Déterminer les affixes du milieu I de $[M_1M_2]$ et du centre de gravité G du triangle $M_1M_2M_3$.
 - Placer les points M_1, I et G sur une figure et indiquer une construction géométrique de M_2 et M_3 .

Exercice 2 Le plan complexe \mathcal{P} est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'unité 4 cm.

On note A le point d'affixe 1 et \mathcal{P}^* le plan \mathcal{P} privé de A .

Soit f l'application de \mathcal{P}^* dans \mathcal{P} qui, à tout point M d'affixe z , associe $M' = f(M)$ d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{z-2}{z-1}$$

- Soit B le point d'affixe $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer $B' = f(B)$.
- Déterminer les points I et J invariants par f (on notera I celui d'ordonnée positive).
 - Exprimer en fonction de z les affixes des vecteurs \overrightarrow{AM} et $\overrightarrow{AM'}$.
 - Déduire de (a) une relation entre AM' et AM et prouver que l'image du cercle \mathcal{C} de centre A et de rayon 1 est le cercle \mathcal{C} . Vérifier que $B \in \mathcal{C}$.
 - Tracer \mathcal{C} et placer les points B, B', I et J sur la figure.

Exercice 3 (Spécialité) On rappelle la formule $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

- En remplaçant q par $\frac{a}{b}$ dans la formule, montrer que quels que soient les réels a et b :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) (a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n)$$

puis, en remplaçant n par $n - 1$:

$$a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (\mathcal{E})$$

- En déduire que si a et b sont des entiers et n un entier naturel non nul, $a - b$ divise $a^n - b^n$.
- En remplaçant b par $-b$ dans l'égalité (\mathcal{E}) montrer de même que :
 - si n est impair, $a + b$ divise $a^n + b^n$
 - si n est pair, $a + b$ divise $a^n - b^n$