Devoir 10

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.
2. On désignera par z_1 lasolution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.
3. (a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.

   (b) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$.
4. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 1 cm), on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et le point A d'affixe $z_A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   (a) Déterminer l'affixe du point M_3, image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport -3.

   (b) Déterminer l'affixe du point M_4, image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   (c) Placer dans le même repère les points A, M_1, M_2, M_3, et M_4.

   (d) Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.

   (e) Soient I le milieu du segment $[\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que les points M_1, M_3, M_5 et M_4 forment un carré.

Exercice 1 On considère un triangle ABC du plan.

1. (a) Déterminer et construire le point G, barycentre de $[(A;1);(B;-1);(C;1)]$.

   (b) Déterminer et construire le point G', barycentre de $[(A;1);(B;5);(C;-2)]$.
2. (a) Soit J le milieu de $[AB]$.
   Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{GG'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JG'}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB).

   (b) Montrer que le barycentre I de $[(B;2)\,;(C;-1)]$ appartient à (GG').
3. Soit D un point quelconque du plan.
   Soient O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$.

   (a) Déterminer trois réels a, d, et c tels que K soit barycentre de $[(A;a);(D;d);(C;c)]$

   (b) Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).
   Déterminer les réels a' et c' tels que X soit barycentre de $[(A;a')\,;(C;c')]$

Exercice 2 (spécialistes) Partie A

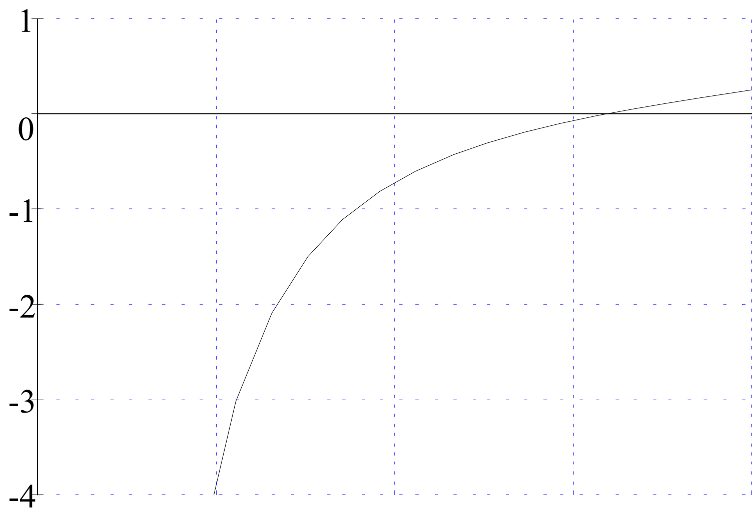
On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a; b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11994 et pour P.G.C.D. 1999.
Partie B On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$: $n^2 - Sn + 11994 = 0$ où S est un entier naturel. On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ? Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994.
   En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ? Préciser le raisonnement employé.
La liste de tous les nombres premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

Exercice 3 Soit la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^2}$

Partie A : Recherche graphique d'un extremum
L'observation de la courbe représentative de la fonction f sur l'écran graphique d'une calculatrice donne à penser que f admet un minimum sur l'intervalle $[0,5; 2]$.
On se propose d'en donner une valeur approchée.
Observer ci-dessous la représentation graphique de la fonction f', dérivée de f, sur l'intervalle $[0,5; 2]$.



Quels sont les éléments graphiques concernant f' qui vont dans le sens de l'existence d'un minimum de f sur $[0,5; 2]$.
A l'aide de ce graphique donner un encadrement d'amplitude 0,2 de l'abscisse de ce minimum.
Partie B :Étude de la fonction f
On considère la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = xe^x - 2e^x + 2$

1. Déterminer les variations de h (on précisera $h(0)$ mais la limite en $+\infty$ n'est pas demandée).
2. Déterminer le signe de $h\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

   En déduire qu'il existe un unique réel a appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$ tel que $h(a) = 0$.

   En déduire le signe de h sur $[0; +\infty[$.

3. **Étude de la fonction f**

   (a) Calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0;+\infty[$.

   (b) Montrer que, pour tout nombre x, strictement positif, $f'(x) = \dfrac{xe^x - 2e^x + 2}{x^3}$
   En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

   (c) Montrer que $f(a) = \dfrac{-1}{a(a-2)}$ et en déduire le signe de $f(a)$.

Partie C : **Quelques propriétés d'une primitive de f**
On appelle F la primitive de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.
Ainsi l'on a, pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$.

1. Étudier le sens de variation de F sur $]0;+\infty[$.

2. Démontrer que, pour tout x supérieur ou égal à 2,

$$\int_2^x f(2)dt \leqslant \int_2^x f(t)dt$$

   Par comparaison de limites, et en utilisant la relation de Chasles, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.