Devoir 11

Exercice 1 $(a \wedge b)$ désigne le PGCD de a et b. $a \vee b$ désigne le $PPCM$ de a et b.

1. Montrer que $a \wedge b$ divise $(a+b) \wedge (ab)$
2. On suppose dans cette question que $(a+b) \wedge (ab) = p^2$ avec p premier.
   (a) Montrer que $p^2 \mid a^2$ *(on pourra remarquer que* $a^2 = a(a+b) - ab$*)*.
   En déduire que $p \mid a$. Montrer que $p \mid b$.
   (b) Démontrer que $a \wedge b = p$ ou p^2 *(on pourra utiliser la question 1)*.
3. (a) Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $(a+b) \wedge (ab) = 49 \quad \text{et} \quad a \vee b = 231$
   Montrer que $a \wedge b = 7$
   (b) Déterminer tous les couples $(a;b)$ d'entiers naturels non nuls tels que
   $(a+b) \wedge (ab) = 49 \quad \text{et} \quad a \vee b = 231$

Exercice 2

1. Une urne A contient deux jetons numérotés 1 et 2.
   Une urne B contient quatre jetons numérotés 1,2,3 et 4.
   On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne (les choix sont supposés équiprobables).
   Soit E : “le jeton tiré porte le numéro 1 et provient de l'urne B ”
   Soit F : “le jeton tiré porte le numéro 1”.
   (a) Calculer $p(E)$
   (b) Calculer $p(F)$
   (c) On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne A ?
2. On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les six jetons précédents. On tire simultanément et au hasard deux jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.
   (a) Calculer la probabilité de tirer deux jetons portant le même numéro.
   (b) Soit S la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des deux jetons tirés. Déterminer $p(S=3)$ et $p(S=4)$.
   (c) Donner, sans justification, la loi de probabilité de S.
   (d) Deux joueurs, M et N, décident que si la somme des numéros tirés est impaire, M donne 10€ à N et que si la somme des numéros tirés est paire N donne λ€ à M.
   Vérifier que la probabilité de l'événement “M donne 10€ à N” est égale à $\dfrac{3}{5}$
   On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe le gain algébrique de M.
   Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de λ puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable *c'est à dire pour que* $E(X) = 0$*)*

Exercice 3

1. On considère dans $\mathbb{C}$ les complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β.
   Montrer que $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\theta \in [0;\pi]$. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^k\theta \cos k\theta = \frac{\cos^{n+1}\theta \sin n\theta}{\sin\theta}$