Devoir 12

Exercice 1 (spécialistes) Le plan complexe est rapporté à un repère orthormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, (unité graphique : 6 cm).
On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z.e^{\frac{5i\,\pi}{6}}$$

et on définit une suite de points M_n de la manière suivante :
M_0 a pour affixe $z_0 = e^{\frac{i\,\pi}{2}}$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f\left(M_n\right)$. On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. Placer les points M_0, M_1, M_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\,\pi}{6}\right)}$ (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p. Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $(n-p)$ est multiple de 12.
4. (a) On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(4, 9)$ est solution, résoudre l'équation (E).
   (b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$.

Exercice 2 On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectuée au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note A l'évènement " l'urne a est choisie " , B l'évènement " l'urne b est choisie " et R l'évènement " une boule rouge est obtenue au tirage ".
On note $p_A\left(R\right)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement R par rapport à l'évènement A.

1. Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.
   (a) Déterminer les probabilités suivantes : $p\left(A\right)$, $p_A\left(R\right)$, $p\left(A\cap R\right)$.
   (b) Montrer que $p\left(R\right) = \dfrac{13}{30}$
   (c) Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit a ?
2. Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches et l'urne b deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges (où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient $(5-n)$.
   (a) Exprimer $p_A\left(R\right)$ et $p_B\left(R\right)$ en fonction de n.
   (b) Démontrer que $p\left(R\right) = \dfrac{-n^2+4n+10}{\left(4+n\right)\left(7-n\right)}$
   (c) On sait que n ne prend que six valeurs entières. Déterminer la répartition possible des cinq boules rouges entre les urnes a et b donnant la plus grande valeur possible de $p\left(R\right)$.

Exercice 3 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ direct.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe $-i$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}-\{i\}$ par : $f(z)=\dfrac{1-iz}{z-i}$

1. Vérifier que pour tout z de $\mathbb{C}-\{i\}$: $f(z)=-i+\dfrac{2}{z-i}$
2. (a) Démontrer que $-i$ n'a pas d'antécédent par f.
   (b) Déterminer les antécédents de 0 et de i par f.
3. A tout point M différent de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=f(z)$.
   (a) Démontrer que pour tout point M différent de A, le produit des longueurs AM et BM' est égal à 2 ($AM.BM'=2$).
   (b) Démontrer que lorsque M décrit le cercle C de centre A et de rayon 4, M' se déplace sur un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.
4. (a) Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que $z-i$ soit un nombre réel non nul.
   (b) Démontrer que lorsque M décrit E, M' se déplace sur une droite Δ que l'on précisera.
   (c) Lorsque M décrit E, M' décrit-il toute la droite Δ ?
5. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur non nul.

Exercice 4 Le plan est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}=\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

PARTIE A
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(x^2-3x+1\right)e^x$
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. (a) Etudier le sens de variation de f et donner le tableau de variation de f.
   (b) Tracer $\mathcal{C}$.
3. Soit $I=\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$
   (a) Interpréter graphiquement I.
   (b) En utilisant l'intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_{-3}^{0} xe^x dx$ puis $\displaystyle\int_{-3}^{0} x^2e^x dx$
   (c) En déduire la valeur exacte de I.

PARTIE B

1. Soit a et b deux nombres réels et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{\left(x^2+ax+b\right)}$
   Quelles sont les valeurs de a et de b pour lesquelles le tableau de variation de g est celui donné ci-dessous ?

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=e^{\left(x^2-3x+1\right)}$ et Γ sa courbe représentative dans le repère $\mathcal{R}$.
   (a) Démontrer que la droite D d'équation $x=\dfrac{3}{2}$ est axe de symétrie de Γ.

(b) Justifier l'affirmation suivante : " 3,2 est une valeur approchée à 10^{-1} près d'une solution de l'équation $h(x) = 5$ "

(c) Soit α un nombre dont 1,7 est une valeur approchée à 0,5 près. Etablir que $0,28 \leqslant h(\alpha) \leqslant 0,47$

PARTIE C

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous (a, b et c étant trois nombres réels).

x	$-\infty$		0		a		b		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	c	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Soit v_1, v_2, v_3 les fonctions définies par : $v_1(x) = e^{u(x)}$ $\quad v_2(x) = u(e^x)$ $\quad v_3(x) = u(x)\,e^x$

1. Déterminer le sens de variation des fonctions v_1 et v_2 (en justifiant votre réponse).
2. Indiquer un intervalle sur lequel il est possible de donner le sens de variation de la fonction v_3 (en justifiant votre réponse).