Devoir n^{o} 2

Exercice 1 On pose $z_0 = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$; $\alpha = z_0 + z_0^4$; $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

1. Montrer que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ et en déduire que α et β sont solutions de $z^2 + z - 1 = 0$.

2. Déterminer α en fonction de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$

3. Résoudre $z^2 + z - 1 = 0$ et en déduire $\cos\dfrac{2\pi}{5}$

Exercice 2 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3},\ z_B = -1 - i,\ z_C = -2 - \sqrt{3} + i$

1. Calculer module et argument de $Z = \dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$
   En déduire la nature du triangle ABC.

2. Ecrire $\dfrac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique
   En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 3 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
Si $z = x + iy \neq 1$, on pose $Z = \dfrac{z-1}{\bar{z}-1}$

1. Calculer $|Z|$.

2. Calculer $\operatorname{Re}(Z)$ et $\operatorname{Im}(Z)$ en fonction de x et y.

3. Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $Z \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
Soient A le point d'affixe -1 et B celui d'affixe i.
Soit f l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point $f(M)$ d'affixe Z telle que

$$Z = i\frac{z-i}{z+1}$$

1. (a) Déterminer $f(G)$ où G est le point d'affixe $-1 + i$.
   (b) Déterminer M tel que $f(M) = O$.

2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.