

Devoir 3

Exercice 1 (spécialistes seulement)

1. Montrer que pour tout entier positif k on a $\begin{cases} 10^k \equiv 1 \pmod{11} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 10^k \equiv -1 \pmod{11} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$
2. En déduire qu'un entier n est divisible par 11 si et seulement si la différence de la somme de ses chiffres de rang impair (en partant de la droite) et de ses chiffres de rang pair (en partant de la droite) est un multiple de 11.

Exercice 2

On pose

$$S = \sum_{k=0}^7 \cos \frac{(2k+1)\pi}{17} = \cos \frac{\pi}{17} + \cos \frac{3\pi}{17} + \dots + \cos \frac{15\pi}{17}$$

Déterminer la valeur exacte de S .

Exercice 3

Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 6x\sqrt{x} - 3x^2 - 2x \end{matrix}$

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer $f'(x)$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
3. Montrer que f' est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer $f''(x)$.
4. f' est-elle dérivable en 0. Si oui, calculer $f''(0)$.
5. Etudier le signe de f'' et dresser le tableau de variations de f' .
6. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ possède deux solutions α et β (avec $\alpha < \beta$).
7. Etudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f .
8. En reprenant l'expression de f' et en posant $t = \sqrt{x}$, exprimer α et β .
9. Tracer la courbe représentative de f .

Exercice 4

Soit f , une fonction définie sur \mathbb{R} et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On suppose que le point A de coordonnées (a, b) est centre de symétrie de \mathcal{C} .

1. En considérant l'image du point de coordonnées $(a, f(a))$ par la symétrie de centre A , montrer que A est un point de \mathcal{C} .
2. Donner un exemple de fonction dont la courbe représentative possède un centre de symétrie qui n'appartient pas à la courbe.
3. Exprimer les coordonnées (x', y') de l'image du point de coordonnées (x, y) par la symétrie de centre A .
4. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = f(a-x) - b$ est impaire.
5. On suppose que \mathcal{C} possède un second centre de symétrie B de coordonnées (c, b) avec $c \neq a$. Montrer que f est périodique.