

Devoir 4

Exercice 1 On appelle partie entière du réel x et on note $E(x)$ le plus grand entier relatif n tel que $n \leq x$.

On a donc $E(x) \leq x \leq 1 + E(x)$.

Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (x - E(x)) \sin \frac{\pi x}{2}$$

est périodique de période 4.

Exercice 2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$$

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer f' .
2. Montrer que f' s'annule en deux points a et b ($a < b$)
 - (a) Etudier le signe de f' .
 - (b) Montrer que $f(a) = \frac{1}{2a}$ et $f(b) = \frac{1}{2b}$.
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. On note m_λ le minimum de f et M_λ son maximum.
 - (a) Exprimer m_λ et M_λ en fonction de λ .
 - (b) Si on pose $m_\lambda = \varphi(\lambda)$ et $M_\lambda = \psi(\lambda)$ déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(\lambda)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(\lambda)$.

Exercice 3 Soient a_1, a_2, \dots, a_n n réels distincts tels que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \dots + \frac{1}{x - a_n}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer la dérivée de f .
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \lambda$.

Exercice 4 Soit $\alpha \in]-\pi; \pi[$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 - 2z \sin 2\alpha + 2(1 + \cos 2\alpha) = 0$$

2. Déterminer module et argument de ces solutions.
3. Pour quelles valeurs de α les deux solutions sont-elles distinctes ?

Exercice 5 On se place dans le plan complexe.

1. Déterminer les points M dont l'affixe z vérifie $z - i\bar{z} = 0$
2. Au point M d'affixe z on fait correspondre le point M' d'affixe $f(z)$ avec

$$f(z) = \frac{z + \bar{z} - i}{z - i\bar{z}}$$

Déterminer l'ensemble de définition de f .

3. Montrer que $f(i)^4$ est réel.

Exercice 6 Soit (r_n) la suite géométrique de premier terme $r_0 > 0$ et de raison $\frac{2}{3}$

Soit (θ_n) la suite arithmétique de premier terme $\theta_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$

On note $z_n = r_n (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$ et on suppose que $z_0 z_1 z_2 = 8$.

1. Exprimer r_n en fonction de r_0 et n .
2. Exprimer θ_n en fonction de θ_0 et n .
3. Déterminer module et argument de z_0, z_1, z_2
4. Le plan complexe étant rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$:

(a) Calculer $\left\| \overrightarrow{M_n M_{n+1}} \right\|$ en fonction de n .

(b) Calculer $I_n = \sum_{k=0}^n \left\| \overrightarrow{M_k M_{k+1}} \right\|$ en fonction de n .

(c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

Exercice 7 (spécialistes seulement)

1. Soit $A_n = 2^n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que si A_n est premier, n est premier.
2. Soit $B_n = 1111\dots 111$, le nombre qui s'écrit dans le système décimal avec n chiffres 1 consécutifs.
Montrer que si B_n est premier, n est premier
3. Soit p un nombre premier
 - (a) Quels sont les restes possibles de la division de p par 4 ?
 - (b) Quels sont les restes possibles de la division de p par 6 ?
 - (c) En déduire que pour tout nombre premier supérieur ou égal à 5, $p^2 - 1$ est divisible par 24.
4. Soit p un nombre premier. Trouver tous les entiers naturels m et n tels que $m^2 - n^2 = p$