

Devoir 5

Exercice 1 Soit f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1. Justifier l'existence et l'unicité d'une primitive F de f sur \mathbb{R} telle que $F(0) = 0$.
2. En dérivant $x \mapsto F(x) + F(-x)$ montrer que F est impaire.
3. Soit G la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$.
Calculer la dérivée de G et montrer que F possède une limite en $+\infty$ qui vaut $2F(1)$.
4. Soit H définie sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par $H(x) = F(\tan x)$
 - (a) Montrer que H est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et calculer $H'(x)$.
 - (b) En déduire une expression simple de $H(x)$.
5. Déterminer $F(1)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Exercice 2 Soit f définie par

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 3}{(x^2 - 1)^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D} de f .
2. Déterminer des réels a et b tels que $\forall x \in \mathcal{D}$:

$$f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$$

3. En déduire toutes les primitives de f sur $]1; +\infty[$

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{1+4x^2}{\sqrt{1+2x^2}}$$

1. Montrer que f admet des primitives sur \mathbb{R}
2. Montrer qu'une fonction de la forme $x \mapsto \sqrt{P(x)}$ où P est un polynôme de degré 2 ne peut être primitive de f sur \mathbb{R}
3. Soit g dérivable sur \mathbb{R} et $h : x \mapsto g(x)\sqrt{1+2x^2}$. Calculer $h'(x)$.
4. Déterminer une primitive de f sur \mathbb{R}