DEVOIR 6

Exercice 1.

1. u désigne un nombre complexe différent de -1, de module 1 et d'argument θ. Calculer le module et l'argument du nombre complexe $\dfrac{1-u}{1+u}$. En déduire le module et l'argument du nombre complexe z tel que $\dfrac{2+\mathrm{i}z}{2-\mathrm{i}z}=u$.

2. Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation :

$$(2+\mathrm{i}z)^5=(2-\mathrm{i}z)^5.$$

Exercice 2.

z désigne un nombre complexe non nul et $\overline{z}$ son conjugué.

On fait correspondre à z ($z = x + \mathrm{i}y$) le point M de coordonnées (x ; y) dans un plan affine euclidien P de repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}})$.

1. Montrer que $\dfrac{2z-1}{z^2}$ est réel si et seulement si $z=\overline{z}$ ou $2z\overline{z}=z+\overline{z}$.

2. On suppose la deuxième condition satisfaite ; quel est l'ensemble des points M ?

3. Soit $\theta = \mathrm{Arg}z$; calculer en fonction de θ, $|z|$ puis $\dfrac{2z-1}{z^2}$.

Exercice 3.

Soit P le plan rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{\mathrm{v}})$, (unité : 5 cm). Soit f la fonction définie par :

$$\mathrm{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f ; montrer que f est une fonction impaire.

2. Etudier f (variations, limites), on pourra remarquer que $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2}\ln(1-x)$. Construire sa représentation graphique C dans le plan P. Soit A le point d'intersection de C avec la droite d'équation $y = 1$. Déterminer l'abscisse de A.

3. Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}. Donner l'ensemble de définition de f^{-1} et son tableau de variation. Construire, dans le même repère que C, la représentation graphique Γ de f^{-1}. Soit B l'intersection de Γ avec la droite d'équation $x = 1$. Calculer l'ordonnée de B.

4.a. Démontrer que pour tout réel x : $\mathrm{f}^{-1}(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}-1$.

4.b. En déduire une primitive G de f^{-1} sur $\mathbf{R}$. Calculer l'aire de la portion de plan limitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 0$.

4.c. Soit E la portion de plan limitée par l'arc OA de la courbe C, la droite d'équation $y = 1$, la droite d'équation $x = 1$ et l'arc OB de la courbe Γ. Déduire de la question 4.b. l'aire de E.