Devoir 7

Sujet National 1998 Série S

Les tracés de courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 2 cm).
On rappelle qu'une fonction f est majorée par une fonction g (ce qui signifie aussi que g est minorée par f) sur un intervalle I si et seulement si, pour tout x appartenant à I, $f(x) \leqslant g(x)$.

Partie A

Soit f et g les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$; on notera C la représentation graphique de f et Γ celle de g.
On se propose de démontrer que f est minorée par g sur $[0;+\infty[$.
Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Etudier le sens de variation de h sur $[0;+\infty[$; calculer $h(0)$. (L'étude de la limite de h en $+\infty$ n'est pas demandée.)
2. En déduire que pour tout réel x positif ou nul,

   (1) $$\frac{2x}{x+2} \leqslant \ln(1+x)$$
3. Construire dans le même repère les courbes C et Γ et montrer qu'elles admettent en O une même tangente D que l'on tracera. (On justifiera rapidement le tracé de ces courbes).

Partie B

k désignant un réel strictement positif, on se propose de déterminer toutes les fonctions linéaires $x \mapsto kx$, majorant la fonction : $f : x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0;+\infty[$.
Soit f_k la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$.

1. Étudier le sens de variation de f_1 définie sur $[0;+\infty[$ par :

   $$f_1(x) = \ln(1+x) - x$$
2. Étudier la limite de f_1 en $+\infty$ et donner la valeur de f_1 en 0.
3. Montrer que pour tout réel x positif ou nul :

   (2) $$\ln(1+x) \leqslant x.$$

4. En déduire que si $k \geqslant 1$, alors : pour tout $x \geqslant 0, f(x) \leqslant kx$

5. Le réel k vérifie les conditions : $0 < k < 1$.
   Montrer que la dérivée de f_k s'annule pour $x = \dfrac{1-k}{k}$ et étudier le sens de variation de f_k. (L'étude de la limite de f_k en $+\infty$ n'est pas demandée.)

6. En déduire les valeurs de k strictement positives telles que pour tout $x \geqslant 0$,

$$f(x) \leqslant kx$$

Partie C

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I = \int_0^1 \ln(1+x)dx.$$

   On remarquera éventuellement que :

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

   En déduire le calcul de

$$J = \int_0^1 (x - \ln(1+x))\,dx$$

   puis de

$$K = \int_0^1 \left(\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}\right) dx$$

   Pour le calcul de K on pourra vérifier que

$$\frac{2x}{x+2} = 2 - \frac{4}{2+x}$$

   Interpréter géométriquement les valeurs des intégrales J et K en utilisant les courbes C, Γ et la droite D obtenues dans la partie A.

2. Soit u la fonction définie sur $[0;1]$ de la façon suivante :

$$u(0) = 1 \quad \text{et si } x \neq 0, \quad u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

   (a) Démontrer que la fonction u est continue sur $[0;1]$.

   (b) On pose :

$$L = \int_0^1 u(x)dx.$$

   En utilisant les inégalités (1) et (2) obtenues dans les parties A et B, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{2}{x+2}dx \leqslant L \leqslant 1.$$

   En déduire une valeur approchée de L à 10^{-1} près.

Amérique du Nord 1998 Série S

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 + n\ln(x)}{x^2}$$

PARTIE A
I : Etude des fonctions f_n

1. Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur et $n - 2 - 2n\ln(x)$.
2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Etudier le signe de $f_n'(x)$
3. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$
4. Etablir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

II : Représentation graphique de quelques fonctions f_n
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 5 cm). On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

1. Tracer (C_2) et (C_3) .
2. (a) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?
   (b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe (C_n) à partir de (C_2) et (C_3) .

PARTIE B
Calculs d'aires

1. Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale :
$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$
2. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
3. On note A_n l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe (C_n) et les droites d'équations $y = 0$, $x = 1$ et $x = e$.
   (a) Calculer A_2.
   (b) Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation graphique de sa raison.

PARTIE C
Etude sur l'intervalle $]1; +\infty[$ de l'équation $f_n(x) = 1$.
Dans toute la suite, on prendra $n \geqslant 3$.

1. (a) Vérifier que, pour tout n,

$$e^{\frac{n-2}{2n}} > 1 \text{ et } f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$$

   (b) Vérifier que l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1; e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet sur l'intervalle $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty\right[$ exactement une solution notée α_n.

3. On se propose de déterminer la limite de la suite (α_n).

   (a) Calculer $f_n\left(\sqrt{n}\right)$ et montrer que, pour $n > e^2$, on a $f_n\left(\sqrt{n}\right) \geqslant 1$.

   (b) En déduire que, pour $n \geqslant 8$, on a $\alpha_n \geqslant \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n).