



Suites et révisions

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique : 4 cm.

Partie A ★ Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$

1. Étudier le sens de variation de g sur $[0 ; +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0 ; +\infty[$.
On note α cette solution.
b. Prouver que $1,14 < \alpha < 1,15$
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B ★ Étude de la fonction f et tracé de la courbe \mathcal{C}

1. (a) Montrer que, pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.
b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
2. (a) Montrer que pour tout réel positif x , $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$
b. En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.
3. (a) Établir que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$
b. En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} .
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
4. (a) Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

$$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1} \quad \text{avec } u(x) = e^x - xe^x - 1.$$

- b. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.
- c. Déduire des questions précédentes la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la droite (T).
6. Tracer \mathcal{C} et (T).

Partie C ★ Calcul d'aire et étude d'une suite

1. Déterminer une primitive F de f sur $[0; +\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie dans la question **B.2**.
2. On note \mathcal{D} le domaine délimité par la courbe \mathcal{C} , la tangente (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Calculer, en cm^2 , l'aire A du domaine \mathcal{D} .
Donner une valeur décimale au mm^2 près de l'aire A .
3. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$
 - a. Calculer v_0 , v_1 et v_2 .
On donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près de v_0 , v_1 et v_2 .
 - b. Interpréter graphiquement v_n .
 - c. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$
En déduire la monotonie de la suite (v_n) à partir de $n = 1$.
 - d. Déterminer la limite de la suite (v_n) .

Exercice 2 Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$$

1. (a) Soit φ la fonction définie sur $[0, 2]$ par $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$
Étudier les variations de φ sur $[0, 2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0, 2]$,
 $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$
 - (b) Montrer que, pour tout réel t dans $[0, 2]$, on a : $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$
 - (c) Par intégration en déduire que : $\frac{3}{2} n (e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n (e^{\frac{2}{n}} - 1)$
 - (d) On rappelle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$
Montrer que, si (u_n) possède une limite L , alors $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$
2. (a) Vérifier que pour tout t dans $[0, 2]$, on a $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$
En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$
 - (b) Montrer que, pour tout t dans $[0, 2]$, on a $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$
En déduire que $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$
 - (c) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite L .

Exercice 3 Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique : 5cm).

Partie A

On considère la fonction f_1 définie sur $[0, +\infty[$ par $f_1(x) = xe^{-x^2}$ et on appelle \mathcal{C}_1 sa courbe représentative.

1. Montrez que pour tout réel positif x , $f_1'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$
En déduire le sens de variation de f_1 .
2. Calculez la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$) Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Dresser le tableau de variation de f_1 .
4. On appelle Δ la droite d'équation $y = x$. Déterminez la position de \mathcal{C}_1 par rapport à Δ .
5. Tracez \mathcal{C}_1 et Δ .

Partie B

On considère la fonction f_3 définie sur $[0, +\infty[$ par $f_3(x) = x^3e^{-x^2}$ et on appelle \mathcal{C}_3 sa courbe représentative.

1. Montrez que pour tout réel positif x , $f_3'(x)$ a même signe que $(3 - 2x^2)$. En déduire le sens de variation de f_3 .
2. Déterminez les positions relatives de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_3 .
3. Tracer \mathcal{C}_3 dans le même repère que \mathcal{C}_1 (on admettra que \mathcal{C}_3 a la même asymptote que \mathcal{C}_1 en $+\infty$).
4. On appelle D la droite d'équation $x = 1$. Soit A_1 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe \mathcal{C}_1 , les deux axes de coordonnées et la droite D et soit A_3 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe \mathcal{C}_3 , les deux axes de coordonnées et la droite D .

(a) Calculez A_1 .

(b) Á l'aide d'une intégration par parties, montrez que $A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$

Partie C

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum.
2. On appelle S_n le point de \mathcal{C}_n d'abscisse $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$. Montrer que, pour tout n , \mathcal{C}_n passe par S_2 . Placer S_1, S_2, S_3 sur la figure.
3. Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = e^{\frac{x}{2}[-1 + \ln(\frac{x}{2})]}$
c'est à dire $g(x) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(-1 + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]$
 - (a) Étudier le sens de variation de g .
 - (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$.
En déduire que tout point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2 .