Devoir 9 : Géométrie

Exercice 1 Soient trois points de l'espace A, B, C non alignés et soit k un réel de l'intervalle $[-1;1]$. On note G_k le barycentre du système $\left\{(A,k^2+1),(B,k),(C,-k)\right\}$

1. Représenter les points A, B, C, le milieu I de $[BC]$ et construire les points G_1 et G_{-1}.

2. (a) Montrer que pour tout réel k de l'intervalle $[-1,1]$, on a l'égalité $\overrightarrow{AG_k} = \dfrac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

   (b) Etablir le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$

   (c) En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1,1]$.
   Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.

3. Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

4. Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(0;0;2)$, $(-1;2;1)$ et $(-1;2;5)$. Le point G_k et les ensembles E et F sont définis comme ci-dessus.

   (a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}. Montrer que les ensembles E et F sont sécants.

   (b) Calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}$ intersection de E et F.

Exercice 2 On considère un triangle ABC du plan.

1. (a) Déterminer et construire le point G, barycentre de $[(A;1);(B;-1);(C;1)]$.

   (b) Déterminer et construire le point G', barycentre de $[(A;1);(B;5);(C;-2)]$.

2. (a) Soit J le milieu de $[AB]$.
   Exprimer $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB).

   (b) Montrer que le barycentre I de $[(B;2);(C;-1)]$ appartient à (GG').

3. Soit D un point quelconque du plan.
   Soient O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$.

   (a) Déterminer trois réels a, d, et c tels que K soit barycentre de $[(A;a);(D;d);(C;c)]$

   (b) Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).
   Déterminer les réels a' et c' tels que X soit barycentre de $[(A;a');(C;c')]$.