



# Fonction exponentielle

## 1 Définition

La fonction  $\ln$  est une bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .

Donc pour tout  $\lambda$  réel, il existe un et un seul réel strictement positif  $\alpha$  tel que  $\ln \alpha = \lambda$ .

L'application qui, à  $\lambda$ , associe  $\alpha$  est la bijection réciproque de  $\ln$ . On la note  $\exp$

**Définition 1** La fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction  $\ln$ .

$$\begin{cases} y = \exp x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$$

**Remarque 1** La fonction exponentielle est définie sur  $\mathbb{R}$

**Remarque 2** On a :  $\forall x \in \mathbb{R} : \exp x > 0$

**Remarque 3**  $\exp 0 = 1$  et  $\exp 1 = e$

**Remarque 4**  $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(\exp x) = x$  et  $\forall x \in ]0; \infty[ : \exp(\ln x) = x$

## 2 Propriété fondamentale

**Théorème 1** Pour tous réels  $a$  et  $b$  :  $\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$

**Démonstration.** Pour tous réels  $a$  et  $b$  :  $a + b = \ln(\exp a) + \ln(\exp b) = \ln(\exp a \times \exp b)$ .  
D'où le résultat par définition de la fonction  $\exp$ .

**Remarque 5**  $\forall n \in \mathbb{Z} : \ln e^n = n \ln e = n \Rightarrow e^n = \exp n$ . On étend cette notation sur  $\mathbb{R}$  :

$$\boxed{\exp x = e^x}$$

**Théorème 2** Pour tous réels  $a$  et  $b$  et pour tout entier relatif  $n$  :

|                             |                          |                    |
|-----------------------------|--------------------------|--------------------|
| $e^{a+b} = e^a e^b$         | $e^0 = 1$                | $e^1 = e$          |
| $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ | $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$ | $(e^a)^n = e^{na}$ |

**Démonstration.** Les formules de la première ligne ont déjà été démontrées. Seule la notation change. Les autres sont laissées à titre d'exercice.

### 3 Etude de la fonction exponentielle

#### 3.1 Dérivée et sens de variation

**Théorème 3** la fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$

**Démonstration.** Nous admettrons la dérivabilité sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $\ln \circ \exp$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Or  $\forall x \in \mathbb{R} : \ln \circ \exp(x) = x$ . Donc par dérivation :  $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{(\exp x)'}{\exp x} = 1$ .

**Corollaire 1** La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

**Corollaire 2**  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$  et  $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

#### 3.2 Limites

**Théorème 4**

|  |  |
|--|--|
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ |
|--|--|

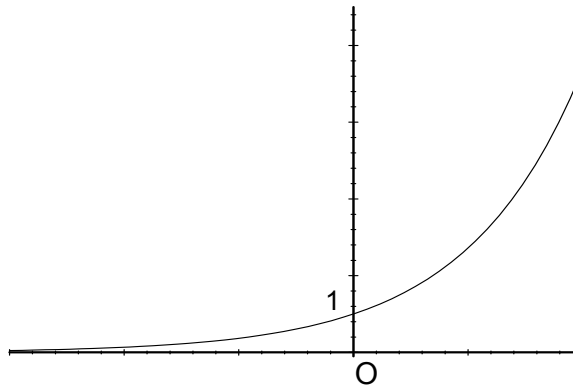
**Démonstration.** Tout d'abord montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} : e^x \geq x + 1$  en étudiant par exemple  $x \mapsto e^x - x - 1$

On en déduit alors, puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$  que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

En posant  $t = -x : \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0$  d'après la limite précédente

#### 3.3 Courbe

|         |           |                    |
|---------|-----------|--------------------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$          |
| $f'(x)$ |           |                    |
| $f(x)$  | 0         | $\nearrow +\infty$ |



On peut préciser la tangente au point d'abscisse 0. Elle a pour pente 1.

#### 3.4 Formes indéterminées

**Théorème 5**

|  |  |  |
|--|--|--|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ |
|--|--|--|

**Démonstration.** La fonction exponentielle étant dérivable sur  $\mathbb{R}$  est dérivable en 0.

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - \exp 0}{x - 0} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$ .

$\forall x > 0 : \frac{e^x}{x} = \frac{e^x}{e^{\ln x}} = e^{x - \ln x} = e^{x(1 - \frac{\ln x}{x})}$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

En posant  $t = -x : \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t}{e^t} = 0$  car  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

## 4 Composée $\exp \circ u$

**Théorème 6** Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , la fonction composée  $\exp \circ u : x \mapsto e^{u(x)}$  est dérivable sur  $I$  et sa dérivée est la fonction  $x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$ .

$$(e^u)' = u'e^u$$

**Démonstration.** C'est l'application de la formule  $(f \circ u)' = (f' \circ u) \cdot u'$

**Corollaire 3** Si  $u$  est une fonction dérivable sur l'intervalle  $I$ , la fonction  $u'e^u$  est intégrable sur  $I$  et admet pour primitives les fonctions  $e^u + C$  où  $C$  est une constante réelle quelconque.

## 5 Equation différentielle $y' = ay$

Soit  $a$  un réel donné.

Résoudre l'équation différentielle  $y' = ay$  sur  $\mathbb{R}$ , c'est trouver toutes les fonctions  $y$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} : y'(x) = ay(x)$$

**Théorème 7** Les solutions de l'équation différentielle  $y' = ay$  sont les fonctions  $y$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$y(x) = Ce^{ax}$$

où  $C$  désigne une constante réelle quelconque.

**Démonstration.**  $y' = ay \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : y'(x) - ay(x) = 0$   
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : [y'(x) - ay(x)] e^{-ax} = 0$   
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : y'(x) e^{-ax} + y(x) (-ae^{-ax}) = 0$   
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : [y(x) e^{-ax}]' = 0$   
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : y(x) e^{-ax} = C$

**Corollaire 4**  $x_0$  et  $y_0$  étant deux réels donnés, il existe une et une seule solution de l'équation différentielle  $y' = ay$  vérifiant  $y(x_0) = y_0$ .

**Démonstration.** On a  $y(x) = Ce^{ax}$  donc  $y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow Ce^{ax_0} = y_0 \Leftrightarrow C = y_0 e^{-ax_0}$

**Exemple 1** Soit l'équation différentielle  $(E) : 2y' + 3y = 6x^2 - 7x + 2$

1. Déterminer une fonction  $g$ , polynôme du second degré, solution de  $(E)$ .
2. Montrer qu'une fonction  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $(f - g)$  est solution de l'équation homogène associée  $(H) : 2y' + 3y = 0$
3. En déduire toutes les solutions de  $(E)$ .