Homothéties - Translations

1 Définition

1.1 Rappels et compléments sur les translations

Définition 1 La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui, àtout point M du plan, associe le point M' défini par

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

Théorème 1 $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

1.2 Rappels et compléments sur les homothéties

Définition 2 Soient Ω un point du plan et k un réel non nul. L'homothétie de centre Ω et de rapport k est la transformation notée $h_{\Omega,k}$ qui, à tout point M du plan, associe le point M' défini par

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

Remarque 1

1. Si $k = 1$, $h_{\Omega,k} = id$
2. Si $k \neq 1$, Ω est le seul point fixe de $h_{\Omega,k}$ et Ω, M, M' sont alignés
3. Si $k = -1$, $h_{\Omega,k} = s_\Omega$ symétrie de centre Ω.
4. La transformation réciproque de $h_{\Omega,k}$ est $h_{\Omega,1/k}$
5. Si A et B sont deux points du plan d'images respectives A' et B' par $h_{\Omega,k}$ alors $\overrightarrow{\Omega A'} = k\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B'} = k\overrightarrow{\Omega B}$ d'où par différence : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ et donc $A'B' = |k|\, AB$.
   Une homothétie de rapport k multiplie donc les distances par $|k|$ et les aires par k^2.
6. Les seules homothéties qui sont des isométries sont :
   (a) l'identité, homothétie de rapport 1.
   (b) les symétries centrales, homothéties de rapport -1.
7. Si h est une homothétie,
   (a) l'image du segment $[AB]$ est le segment $[h(A); h(B)]$
   (b) l'image de la droite (AB) est la droite $(h(A); h(B))$ qui est parallèle à (AB).
   (c) l'image du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre $h(A)$ et de rayon $|k|\, R$.
8. Les homothéties conservent
   (a) le parallélisme
   (b) l'orthogonalité
   (c) les milieux
   (d) les barycentres
   (e) les angles orientés

2 Ecriture complexe

Théorème 2 La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b est la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = z + b$$

Démonstration. C'est la traduction de $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Théorème 3 L'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k est la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' - \omega = k\left(z - \omega\right)$$

Démonstration. C'est la traduction de $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

Théorème 4 La transformation d'écriture complexe $z' = kz + b$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ est

1. l'identité si $a = 1$ et $b = 0$
2. une translation si $a = 1$ et $b \neq 0$
3. une homothétie de rapport a si $a \neq 1$.

Démonstration. Si $a = 1$, $z' = z + b$ traduit la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
Si $a \neq 1$ et si on pose $\omega = \frac{b}{1-a}$ on a $\omega = a\omega + b$: $\left.\begin{array}{r} z' = az + b \\ \omega = a\omega + b \end{array}\right\} \Rightarrow z' - \omega = a\left(z - \omega\right)$

Théorème 5 Soit f une transformation du plan. f est une translation si et seulement si pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f on a

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$$

Démonstration. Si f est la translation de vecteur $\vec{u}$, on a $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$.
D'où $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u} = \overrightarrow{MN}$
Réciproquement, si pour tous points M et N on a $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$, en prenant $M = 0$ et en notant b, z, z' les affixes respectives de $O' = f\left(O\right), N$ et N', on a $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{O'N'} = \overrightarrow{ON} \Rightarrow z' - b = z \Rightarrow z' = z + b$ écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.

Théorème 6 Soit f une transformation du plan. f est une homothétie de rapport $k \neq 1$ si et seulement si pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f on a

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$$

Démonstration. Si f est une homothétie de centre Ω et de rapport k :
$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \\ \overrightarrow{\Omega N'} = k\overrightarrow{\Omega N} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{\Omega N'} - \overrightarrow{\Omega M'} = k\left(\overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M}\right) = k\overrightarrow{MN}$
Réciproquement, si pour tous points M et N on a $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, en prenant $M = O$ et en notant b, z, z' les affixes respectives de $O' = f\left(O\right), N$ et N', on a $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{O'N'} = k\overrightarrow{ON} \Rightarrow z' - b = kz \Rightarrow z' = kz + b$ écriture complexe d'une homothétie de rapport k.

3 Composée d'homothéties et de translations

3.1 Composée $t \circ h$

Soient t la translation d'écriture complexe $z' = z + b_1$ et h l'homothétie d'écriture complexe $z' = az + b_2$.
h associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe

$$z' = az + b_2$$

$$z'' = az + b_2 + b_1$$

et t associe au point M' d'affixe z' le point M'' d'affixe

$$z'' = z' + b_1 = az + b_1 + b_2$$

Théorème 7 $t \circ h$ associe donc à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe

$$z'' = az + b_1 + b_2$$

$t \circ h$ est donc une homothétie de rapport a.

3.2 Composée $h \circ t$

Soient t la translation d'écriture complexe $z' = z + b_1$ et h l'homothétie d'écriture complexe $z' = az + b_2$.
t associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = z + b_1$
h associe au point M' le point M'' d'affixe $z'' = az' + b_2 = a(z + b_1) + b_2 = az + (ab_1 + b_2)$

Théorème 8 $h \circ t$ est donc la transformation qui associe à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe

$$z'' = az + (ab_1 + b_2)$$

$h \circ t$ est donc une homothétie de rapport a.

Théorème 9 La composée d'une translation et d'une homothétie de rapport a est une homothétie de rapport a.

3.3 Composée de deux homothéties

Théorème 10 Soient h_1 et h_2 deux homothéties d'écritures complexes respectives $z' = a_1 z + b_1$ et $z' = a_2 z + b_2$

$h_1 \circ h_2$ associe à tout point M d'affixe z le point M'' d'affixe

$$z'' = a_1(a_2 z + b_2) + b_1 = a_1 a_2 z + (a_1 b_2 + b_1)$$

Donc, si $a_1 a_2 = 1$: $h_1 \circ h_2$ est une translation sinon, c'est une homothétie de rapport $a_1 a_2$

Remarque 2 En général, $h_2 \circ h_1 \neq h_1 \circ h_2$.

Remarque 3 Si h_1 et h_2 ont des centres distincts et si $h_1 \circ h_2$ est une homothétie, les centres de h_1, h_2 et $h_1 \circ h_2$ sont alignés. En effet, si h_1 et h_2 ont pour centres respectifs Ω_1 et Ω_2, la droite $(\Omega_1 \Omega_2)$ est globalement invariante par h_1 et par h_2 donc par $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$. Elle passe donc par le centre de la composée.