

# Géométrie dans l'espace

## 1 Barycentre

### 1.1 Barycentre de $n$ points pondérés

On appelle point pondéré tout couple  $(A; \alpha)$  formé d'un point  $A$  et d'un réel  $\alpha$ . On dit que  $A$  est affecté du coefficient  $\alpha$ .

**Théorème 1 (et définition)** Soient  $n$  points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  et  $n$  réels  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  de **somme non nulle**. Il existe un et un seul point  $G$  appelé barycentre de  $(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \dots, (A_n; \alpha_n)$  tel que

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

Il est commode de noter  $G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \hline \end{array}$

ou  $G = \text{bar} \{(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \dots, (A_n; \alpha_n)\}$

Démonstration. Pour tout entier  $k$  tel que  $2 \leq k \leq n$  :  $\overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_k}$ .

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \alpha_k (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_k}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1G} = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{A_1A_k}}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$$

Cette dernière relation définit  $G$  de manière unique car un point  $A$  et un vecteur  $\vec{u}$  étant donnés, il existe un et un seul point  $B$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ .

**Définition 1** On appelle isobarycentre des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  le barycentre de tous ces points affectés d'un même coefficient non nul.

**Remarque 1** L'isobarycentre de deux points  $A$  et  $B$  est le milieu du segment  $[AB]$ .

**Remarque 2** L'isobarycentre de trois points non alignés  $A, B, C$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$ . C'est le point d'intersection des médianes.

### 1.2 Réduction de sommes vectorielles

**Théorème 2** Soit le système de points pondérés  $(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \dots, (A_n; \alpha_n)$ .

1. Si  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$ , pour tout point  $M$  de l'espace :  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k} = \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k \right) \overrightarrow{MG}$
2. Si  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$ , pour tout point  $M$  de l'espace :  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k}$  est un vecteur constant.

**Démonstration.**

$$1. \overrightarrow{MA_k} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_k} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k} = \sum_{k=1}^n \alpha_k (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_k}) = \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k \right) \overrightarrow{MG} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{GA_k}$$

D'où le résultat puisque  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
2. \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MA_k} &= \sum_{k=1}^n \alpha_k (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{OA_k}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{MO} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{OA_k} \\
&= \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k \right) \overrightarrow{MO} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{OA_k} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \overrightarrow{OA_k} \text{ vecteur fixe.}
\end{aligned}$$

### 1.3 Propriétés du barycentre

**Théorème 3**  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^* : \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \hline \end{array} = \text{bar} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ \hline \lambda\alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \cdots & \lambda\alpha_n \\ \hline \end{array}$

**Théorème 4 (associativité ou barycentre partiel)** Le barycentre de  $n$  points pondérés peut être obtenu en remplaçant une partie des points par leur barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme des coefficients correspondant.

### 1.4 Propriétés analytiques

**Théorème 5** Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  des réels tels que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$ .

Si, dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$   $A_k$  a pour coordonnées  $(x_k, y_k)$ , alors le barycentre  $G$  du système de points pondérés  $(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \dots, (A_n; \alpha_n)$  a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}; \quad y_G = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k y_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$$

**Corollaire 1** Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  des réels tels que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$ .

Dans le plan complexe, si les points pondérés  $(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \dots, (A_n; \alpha_n)$  ont pour affixe  $z_k$ , le barycentre  $G$  du système  $\{(A_k, \alpha_k)\}_{1 \leq k \leq n}$  a pour affixe  $z_G = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k z_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$

**Théorème 6** Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  des réels tels que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$ .

Si, dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$   $A_k$  a pour coordonnées  $(x_k, y_k, z_k)$ , alors le barycentre  $G$  du système de points pondérés  $(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \dots, (A_n; \alpha_n)$  a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}; \quad y_G = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k y_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}; \quad z_G = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k z_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$$

### 1.5 Droites, segments, plans

**Théorème 7** Si les points  $A$  et  $B$  sont distincts, la droite  $(AB)$  est l'ensemble des barycentres des points  $A$  et  $B$ .

**Démonstration.** On sait déjà que le barycentre de deux points  $A$  et  $B$  appartient à la droite  $(AB)$ .

Réciproquement, la droite  $(AB)$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires.

$$M \in (AB) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \Rightarrow (1 - \lambda) \overrightarrow{MA} + \lambda \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Donc  $M$  est barycentre de  $(A; 1 - \lambda)$  et  $(B; \lambda)$  car la somme  $(1 - \lambda) + \lambda$  n'est pas nulle.

**Théorème 8** Soient  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  deux points distincts de l'espace.

Un point  $M(x; y)$  appartient à la droite  $(AB)$  si et seulement si il existe un réel  $\lambda$  tel que

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda(x_B - x_A) \\ y = y_A + \lambda(y_B - y_A) \\ z = z_A + \lambda(z_B - z_A) \end{cases} \text{ système appelé représentation paramétrique de la droite } (AB).$$

**Démonstration.** C'est la traduction de  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ .

**Remarque 3** Le système  $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une représentation paramétrique de la droite passant par  $A(x_0; y_0; z_0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(a; b; c)$ .

**Théorème 9** Si les points  $A$  et  $B$  sont distincts, le segment  $[AB]$  est l'ensemble des barycentres des points  $(A; \alpha)$  et  $(B; \beta)$  avec  $\alpha\beta \geq 0$ .

**Démonstration.**  $M \in [AB] \Rightarrow \exists \lambda \in [0; 1] : \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \Rightarrow (1 - \lambda) \overrightarrow{MA} + \lambda \overrightarrow{MB} = \vec{0}$   
 Donc  $M$  est barycentre de  $(A; 1 - \lambda)$  et  $(B; \lambda)$  car la somme  $(1 - \lambda) + \lambda$  n'est pas nulle.  
 En posant  $\alpha = 1 - \lambda$  et  $\beta = \lambda : \alpha\beta = \lambda(1 - \lambda) \geq 0$  car  $\lambda \in [0; 1]$ .

Réciproquement, si  $M$  est barycentre de  $(A; \alpha)$  et  $(B; \beta)$  avec  $\alpha\beta \geq 0$  :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB} \text{ et } \frac{\beta}{\alpha + \beta} \in [0; 1] \text{ donc } M \in [AB].$$

*Remarque :*  $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$  a même signe que  $\alpha(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta \geq 0$  et  $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = 1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \leq 1$

**Théorème 10** Soient  $A, B, C$  trois points distincts non alignés et  $\mathcal{P}$  le plan qui les contient.  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des barycentres des points  $A, B, C$ .

**Démonstration.**  $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (1 - \lambda - \mu) \overrightarrow{MA} + \lambda \overrightarrow{MB} + \mu \overrightarrow{MC} = \vec{0}$   
 Il reste à remarquer que la somme  $(1 - \lambda - \mu) + \lambda + \mu$  n'est pas nulle.

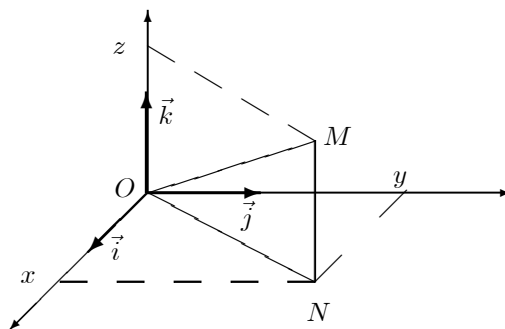
## 2 Produit scalaire

### 2.1 Rappel

**Théorème 11** Dans une base orthonormale  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , si  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $(x, y, z)$  :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**Démonstration.** Soit  $M(x, y, z)$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$  et soit  $N$  la projection orthogonale de  $M$  sur  $xOy$



D'après le théorème de Pythagore :  $ON^2 = x^2 + y^2$  et  $OM^2 = ON^2 + NM^2$ .  
 D'où le résultat puisque  $NM^2 = z^2$ .

### 2.2 Définition

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace.

Choisissons trois points  $A, B, C$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  et  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ .

Il existe toujours un plan  $\mathcal{P}$  contenant ces trois points.

Le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est par définition le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  calculé dans  $\mathcal{P}$ .

**Définition 2** On appelle produit scalaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et on note  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  le nombre réel défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left[ \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right]$$

**Remarque 4** Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

**Remarque 5** Noter l'analogie de la formule avec  $ab = \frac{1}{2} \left[ (a + b)^2 - a^2 - b^2 \right]$

**Théorème 12** Si  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère **orthonormal** et si  $\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$  alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$$

## 2.3 Propriétés

**Théorème 13** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \\ (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v})\end{aligned}$$

## 2.4 Autres expressions du produit scalaire

**Théorème 14** Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$

**Remarque 6**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \cos \widehat{BAC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

**Définition 3**  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  est le carré scalaire de  $\vec{u}$ . On le note  $\vec{u}^2$

**Théorème 15** Pour tout vecteur  $\vec{u}$  on a  $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$

**Théorème 16** Pour tous points  $A$  et  $B$  du plan :  $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2 = \overline{AB}^2$

**Théorème 17** Si  $H$  est la projection orthogonale de  $C$  sur  $(AB)$  :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$

# 3 Orthogonalité dans l'espace

## 3.1 Vecteurs orthogonaux - Droites orthogonales

**Définition 4** Deux vecteurs de l'espace sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

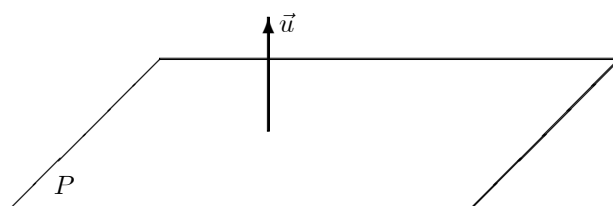
**Remarque 7** Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

**Théorème 18** Les droites  $D$  et  $D'$  de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont orthogonales si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont orthogonaux.

**Remarque 8** Deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires lorsqu'elles sont orthogonales et sécantes.

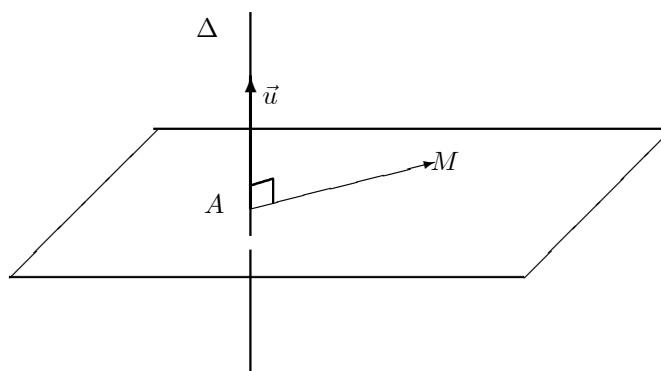
## 3.2 Vecteur normal à un plan

**Définition 5** Un vecteur normal à un plan  $P$  est un vecteur  $\vec{u}$  non nul dont la direction est orthogonale à  $P$ .



**Proposition 1** Il résulte de la définition :

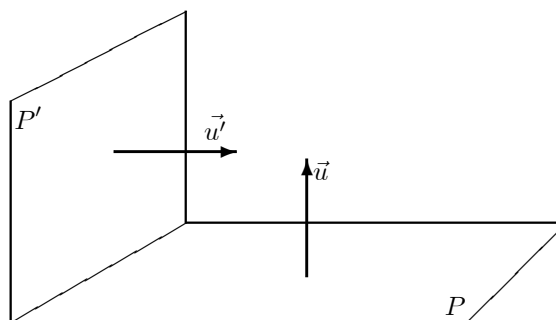
1. Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont normaux au même plan  $P$  :  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires
2. si  $\vec{u}$  est normal au plan  $P$  :  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  pour tous points  $A$  et  $B$  de  $P$ .
3. Si  $\vec{u}$  est normal au plan  $P$ , la droite  $\Delta$  de vecteur directeur  $\vec{u}$  est perpendiculaire au plan  $P$ .
4. Deux plans  $P$  et  $P'$  de vecteurs normaux  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont parallèles si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires.
5. Le plan  $P$  perpendiculaire en  $A$  à la droite  $\Delta$  de vecteur directeur  $\vec{u}$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ .
6. Le plan passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{u}$  est l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ .



**Théorème 19** Soit  $\vec{u}$  un vecteur directeur de la droite  $\Delta$  et soit  $P$  un plan de vecteurs directeurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ . Si  $\vec{u} \perp \vec{v}$  et  $\vec{u} \perp \vec{w}$  alors  $\Delta$  est perpendiculaire à  $P$ .

### 3.3 Plans perpendiculaires

**Définition 6** Deux plans  $P$  et  $P'$  de vecteurs normaux  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont perpendiculaires si  $\vec{u} \perp \vec{u}'$ .



### 3.4 Equations d'un plan en repère orthonormal

**Théorème 20** Dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  :

1. Tout plan  $P$  a une équation de la forme  $ax + by + cz + d = 0$  avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  et le vecteur  $\vec{u}(a, b, c)$  est normal à  $P$ .
2. L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que  $ax + by + cz + d = 0$  avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  est un plan normal au vecteur  $\vec{u}(a; b; c)$ .

**Démonstration.**



1. Soit  $P$  le plan passant par  $A(x_A; y_A; z_A)$  et de vecteur normal  $\vec{u}(a; b; c)$ .

$$M(x; y; z) \in P \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

Equation de la forme voulue avec  $d = -ax_A - by_A - cz_A$ .

2. Soit  $P$  l'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que  $ax + by + cz + d = 0$

- $P$  contient au moins un point. Si  $a \neq 0$  par exemple,  $M\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right) \in P$ .

- Soit  $A(x_A; y_A; z_A) \in P$ .  $A$  existe d'après ce qui précède

$$A \in P \Rightarrow ax_A + by_A + cz_A + d = 0$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = ax + by + cz + d$$

$$\text{Donc } M \in P \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

$P$  est donc le plan passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{u}$ .