Intégration

1 Primitives d'une fonction

Définition 1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle fonction primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I : F'(x) = f(x)$$

Exemple 1 La fonction $F : x \mapsto x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$

Exemple 2 La fonction $F : x \mapsto -\cos x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \sin x$

Théorème 1 Si f est une fonction admettant une primitive sur I, alors f admet une infinité de primitives sur I et si F est une primitive de f sur I, alors toute primitive G de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I.
F est dérivable sur I et $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.
Si G est définie sur I par $G(x) = F(x) + \lambda$ on a G dérivable sur I et $G'(x) = F'(x) = f(x)$.
Donc G est une primitive de f sur I.
De plus, si G est une primitive quelconque de f sur I :
$G'(x) = f(x) \Rightarrow G'(x) = F'(x) \Rightarrow (G - F)'(x) = 0$.
Donc $G - F$ est constante sur I, c'est à dire : $\forall x \in I : G(x) - F(x) = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Théorème 2 Toute fonction dérivable sur I admet des primitives sur I.

Théorème 3 Soit f une fonction admettant des primitives sur l'intervalle I. Soit $a \in I$ et soit $b \in \mathbb{R}$. Alors, il existe **une et une seule** primitive F de f sur I telle que $F(a) = b$

Démonstration. Soit G une primitive de f sur I.
Alors toute autre primitive de f est définie par $F(x) = G(x) + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
$F(a) = b \Leftrightarrow G(a) + \lambda = b \Leftrightarrow \lambda = b - G(\alpha)$. Le choix de λ est donc unique.

Exemple 3 **La** primitive de $f : x \mapsto x$ qui s'annule en 2 est $F : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - 2$.

Théorème 4 Si F et G sont des primitives respectivement de f et g sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I et λF est une primitive de λf sur I

Démonstration. Immédiate

2 Intégrale

Définition 2 Soient a et b deux réels de l'intervalle I et soit f une fonction admettant F pour primitive sur I.
L'intégrale de a à b de la fonction f est le réel noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ défini par

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque 1 On n'a pas forcément $a \leq b$.

Remarque 2 La lettre x est "muette" : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \ldots$

Exemple 4 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = -0 - (-1) = 1$

Exemple 5 $\displaystyle\int_1^0 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^0 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Théorème 5 Soit I un intervalle contenant a et b.
Pour toute fonction f admettant des primitives sur I :

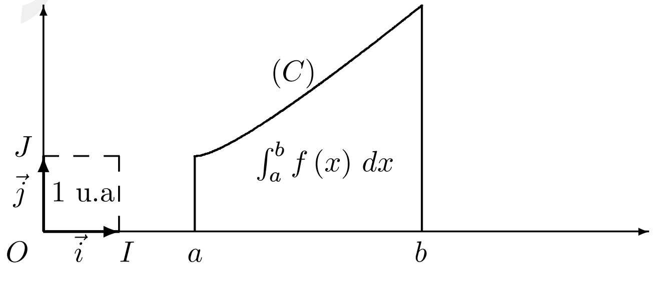
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Démonstration. immédiate

Théorème 6 Soit I un intervalle contenant a et b.
Soient f et g admettant des primitives sur I

$$\int_a^b [\lambda f(x)]\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Théorème 7 Soit f une fonction admettant des primitives sur $[a;b]$. (on a donc $a \leq b$!).
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$, l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$. Résultat en **unités d'aire** : aire du rectangle de côtés OI et OJ où I et J sont définis par $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$



3 Calcul de primitives

λ désigne une constante réelle quelconque.

$f(x)$	$F(x)$	I
α (constante)	$\alpha x + \lambda$	$\mathbb{R}$
x	$\dfrac{x^2}{2} + \lambda$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \lambda$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ si $n \notin \mathbb{N}$) $\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + \lambda$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + \lambda$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + \lambda$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + \lambda$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$f(x)$	$F(x)$	I
$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2(ax+b) = \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\dfrac{1}{a}\tan(ax+b)$	$ax + b \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

u est une fonction dérivable sur l'intervalle I et λ est une constante réelle quelconque.

f	F	I
$u^n.u'$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + \lambda$	
$\dfrac{u'}{u^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$-\dfrac{1}{(n-1)\,u^{n+1}} + \lambda$	$u \neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + \lambda$	$u > 0$ sur I
$(f' \circ u).u'$	$f \circ u + \lambda$	f dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$

Exemple 6 Une primitive de $f : x \mapsto 2x^2 + 3x - 5$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \dfrac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$

Exemple 7 Soit $f(x) = (3x+1)^5$. Si on pose $u(x) = 3x + 1$, alors u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3$.
D'où $f(x) = \dfrac{1}{3}(3x+1)^5 \times 3 = k\,[u(x)]^5 \times u'(x)$ avec $k = \dfrac{1}{3}$
Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F définie par $F(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{(3x+1)^6}{6} + \lambda = \dfrac{1}{18}(3x+1)^6 + \lambda$ où λ est une constante réelle quelconque.