Compléments sur les limites

1 Rappels

1.1 Formes indéterminées

$+\infty-\infty \quad ; \quad \dfrac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \dfrac{0}{0} \quad ; \quad 0.\infty$

Attention : ces "notations" sont des abréviations à ne pas utiliser dans un devoir.

1.2 Limite à droite, limite à gauche

Théorème 1 Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle ouvert en a. On dit que f a pour limite ℓ à droite de a et on note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\ell$ lorsque la restriction de f à $]a;+\infty[$ a pour limite ℓ en a.
ℓ peut être un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
On définit de même la limite à gauche de f en a notée $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

Exemple 1 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty \quad \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty \quad \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^3}=-\infty \quad \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$

Remarque 1 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \Rightarrow f$ n'admet pas de limite en a.

Remarque 2 Si f définie en a et si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq f(a)$, alors f n'admet pas de limite en a.

Remarque 3 Si f définie en a : $\left[\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)\right] \Longleftrightarrow f$ admet une limite en a.

1.3 Limites obtenues par la dérivée

Théorème 2 Si f est dérivable en a : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

Exemple 2 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\cos\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}=-\sin\dfrac{\pi}{2}=-1$

Exemple 3 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$

1.4 Limites usuelles

1. La limite d'un polynôme **en** $+\infty$ **ou en** $-\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré.
2. La limite d'une fraction rationnelle **en** $+\infty$ **ou en** $-\infty$ est la limite du rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
4. les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en $+\infty$ ni en $-\infty$

1.5 Asymptotes

Soit f une fonction de courbe représentative $\mathcal{C}$.

1.5.1 Asymptote parallèle à Oy (verticale)

$\mathcal{C}$ a pour asymptote la droite d'équation $x = a$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Il peut s'agir d'une limite à droite ou à gauche uniquement.

1.5.2 Asymptote parallèle à Ox (horizontale)

$\mathcal{C}$ a pour asymptote la droite d'équation $y = b$ si

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x\to -\infty} f(x) = b$$

1.5.3 Asymptote oblique

$\mathcal{C}$ a pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$ si

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0 \text{ ou } \lim_{x\to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

1.5.4 Asymptote courbe

$\mathcal{C}$ a pour asymptote la courbe d'équation $y = g(x)$ si

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \text{ ou } \lim_{x\to -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

2 Limite d'une fonction composée

Théorème 3 $\boxed{\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} u(x) = b \\ \lim\limits_{X\to b} f(X) = c \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f[u(x)] = c}$

On rédige de la façon suivante pour calculer $\lim\limits_{x\to a} f[u(x)]$:
On pose $X = u(x)$ et on calcule $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$.
On écrit alors : $\lim\limits_{x\to a} f[u(x)] = \lim\limits_{X\to b} f(X) = c$

Exemple 4 Calcul de $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin \dfrac{1}{x}$
On pose $X = \dfrac{1}{x}$: $\lim\limits_{x\to +\infty} X = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \sin \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{X\to 0} \sin X = 0$

Exemple 5 Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+3}}$

On pose $X=\dfrac{x-1}{2x+3}$

$$\lim_{x\to+\infty}X=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{2x+3}}=\lim_{X\to\frac{1}{2}}\sqrt{X}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3 Théorèmes de comparaison

L'expression "*au voisinage de* a" signifie qu'il existe un intervalle contenant a (a éventuellement exclu).
L'expression "*au voisinage de* $+\infty$" signifie qu'il existe un intervalle de la forme $]\beta;+\infty[$.
L'expression "*au voisinage de* $-\infty$" signifie qu'il existe un intervalle de la forme $]-\infty;\alpha[$.
Dans le théorème suivant, on pourra remplacer a par $-\infty$ ou $+\infty$

Théorème 4

$\left.\begin{array}{c} f(x)\leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell \\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=\ell' \end{array}\right\}$	$\Rightarrow \ell\leq\ell'$
$\left.\begin{array}{c} f(x)\geq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty \end{array}\right\}$	$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$
$\left.\begin{array}{c} f(x)\leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty \end{array}\right\}$	$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$
$\left.\begin{array}{c} g(x)\leq f(x)\leq h(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=\ell \end{array}\right\}$	$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$
$\left.\begin{array}{c} \lvert f(x)-\ell\rvert\leq g(x) \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=0 \end{array}\right\}$	$\Rightarrow \lim f(x)=\ell$

Exemple 6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{2x+1}$

$\forall x\in\mathbb{R}:-1\leq\sin x\leq1\Rightarrow\dfrac{x-1}{2x+1}\leq\dfrac{x+\sin x}{2x+1}\leq\dfrac{x+1}{2x+1}$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$

Exemple 7 $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$

Si $x\neq0$, $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq1$ donc $|f(x)|\leq x^2$
$\lim\limits_{x\to0}x^2=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$