Fonction logarithme népérien

1 Définition

Définition 1 La fonction logarithme népérien est la primitive, sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1. On la note $\ln$.

Remarque 1 $\boxed{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}}$ et $\boxed{\ln 1 = 0}$

Remarque 2 La dérivée de ln étant strictement positive sur $]0;+\infty[$, la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. On a donc :

$$\begin{aligned}
a < b &\Leftrightarrow \ln a < \ln b \\
a = b &\Leftrightarrow \ln a = \ln b \\
\ln x < 0 &\Leftrightarrow 0 < x < 1 \\
\ln x > 0 &\Leftrightarrow x > 1
\end{aligned}$$

2 Propriété fondamentale

Théorème 1 Pour tous réels a et b stritement positifs : $\boxed{\ln ab = \ln a + \ln b}$

Démonstration. Soit λ un réel stritement positif et f définie par $f(x) = \ln(\lambda x)$.
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{\lambda}{\lambda x} = \dfrac{1}{x}$.
f est donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ tout comme $\ln$.
Or, deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.
Donc $\forall x \in]0;+\infty[: \ln(\lambda x) = \ln x + C$
En particulier, si $x = 1$, on obtient $\ln \lambda = C$.
Donc pour tout $\lambda \in]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[: \ln(\lambda x) = \ln x + \ln \lambda$

Corollaire 1 Pour tous réels a et b strictement positifs : $\boxed{\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b}$ et $\boxed{\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b}$

Démonstration. $b.\dfrac{1}{b} = 1 \Rightarrow \ln\left(b.\dfrac{1}{b}\right) = \ln 1 \Rightarrow \ln b + \ln \dfrac{1}{b} = 0$
$\ln \dfrac{a}{b} = \ln\left(a\dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \dfrac{1}{b} = \ln a - \ln b$

Corollaire 2 Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont n réels strictement positifs :

$$\ln(a_1 a_2 \ldots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n$$

Démonstration. Par récurrence

Corollaire 3 $\forall a \in \left]0;+\infty\right[$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$: $\boxed{\ln a^n = n \ln a}$

Démonstration.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$.
Si $n < 0$: $\ln a^n = \ln \dfrac{1}{a^{-n}} = -\ln a^{-n} = -(-n \ln a) = n \ln a$.
Si $n = 0$: $\ln a^n = \ln a^0 = \ln 1 = 0$ et $n \ln a = 0 \ln a = 0$.

Corollaire 4 $\forall a > 0$: $\boxed{\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a}$

Démonstration. $a = \sqrt{a}\sqrt{a} \Rightarrow \ln a = \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{a} = 2 \ln \sqrt{a} \Rightarrow \ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$

3 Etude de la fonction ln

3.1 Limites

Théorème 2 $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$

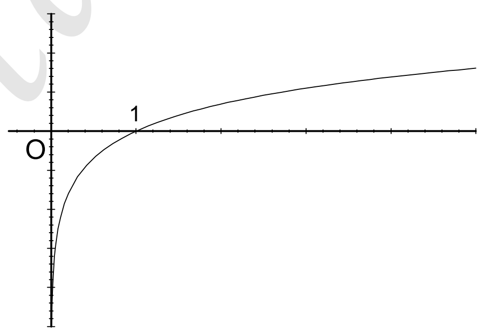
Démonstration. $\forall n \in \mathbb{N}$: $\ln 2^n = n \ln 2$.
Or $\ln 2 > 0$ car $\ln 1 = 0$ et ln est stritement croissante. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln 2 = +\infty$
Donc, $\forall A > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$: $n \geq p \Rightarrow n \ln 2 \geq A$.
Donc, pour tout réel x tel que $x > 2^p$: $\ln x > \ln 2^p = p \ln 2 \geq A$.

Corollaire 5 $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty}$

Démonstration. En posant $t = \dfrac{1}{x}$: $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = \lim\limits_{t \to +\infty} \ln \dfrac{1}{t} = \lim\limits_{t \to +\infty} (-\ln t) = -\infty$

3.2 Représentation graphique

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



3.3 Equation $\ln x = \lambda$

Théorème 3 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $\ln x = \lambda$ admet une et une seule solution dans $\left]0;+\infty\right[$

Démonstration. ln étant strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$ et $\ln 1 = 0$ donc $\ln 2 > 0$.

$-\ln 2 \quad 0 \quad \ln 2 \quad 2\ln 2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad n \ln 2 \quad (n+1)\ln 2 \quad \cdots\cdots\cdots$

$\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \ln 2 \leq \lambda < (n+1) \ln 2$
Donc $\ln 2^n \leq \lambda < \ln 2^{n+1}$.
Sur $\left[2^n ; 2^{n+1}\right]$ ln est dérivable et strictement croissante.
Donc ln est une bijection de $\left[2^n ; 2^{n+1}\right]$ sur $\left[\ln 2^n ; \ln 2^{n+1}\right] = [n \ln 2 ; (n+1) \ln 2]$
donc il existe un réel x_0 et un seul dans $\left[2^n ; 2^{n+1}\right]$ tel que $\ln x_0 = \lambda$
De plus : $x < 2^n \Rightarrow \ln x < \ln 2^n \leq \lambda$
et : $x > 2^{n+1} \Rightarrow \ln x > \ln 2^{n+1} > \lambda$. d'où le résultat.

Corollaire 6 La solution de l'équation $\ln x = 1$ se note e. $\boxed{\ln e = 1}$

Remarque 3 $\forall n \in \mathbb{Z}$: $\boxed{\ln e^n = n}$

3.4 Formes indéterminées

Théorème 4 $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1}$

Démonstration. Si on pose $f(x) = \ln(1+x)$, f est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$
D'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$

Théorème 5 $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$

Démonstration. L'étude des variations de $x \mapsto 2\sqrt{x} - \ln x$ sur $]0; +\infty[$ montre que

$$0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x \geq 1$$

D'où : pour tout $x \geq 1$: $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Il reste à constater que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$.

Corollaire 7 $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0}$

Démonstration. En posant $t = \dfrac{1}{x}$: $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{t} \ln \dfrac{1}{t} = \lim\limits_{t \to +\infty} -\dfrac{1}{t} \ln t = 0$

4 Fonction composée

4.1 Dérivées

Théorème 6 Si u est dérivable et strictement positive sur l'intervalle I, alors $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables car $u(I) \subset]0; +\infty[$ et :

$$\boxed{(\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

Remarque 4 Si u est dérivable et strictement négative sur l'intervalle I, alors $x \mapsto \ln[-u(x)]$ est dérivable sur I et $(\ln[-u(x)])' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
Si u est dérivable et ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors $x \mapsto \ln[|u(x)|]$ est dérivable sur I et

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

4.2 Primitives

- Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, f admet des primitives sur $]-\infty;0[$ et admet des primitives sur $]0;+\infty[$

$$F(x) = \ln|x| + C \qquad \begin{cases} F(x) = \ln x + C & \text{sur }]0;+\infty[\\ F(x) = \ln(-x) + C & \text{sur }]-\infty;0[\end{cases}$$

- Si $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, f admet des primitives sur tout intervalle sur lesquel u est dérivable et ne s'annule pas.

$$F(x) = \ln|u(x)| + C \qquad \begin{cases} F(x) = \ln[u(x)] + C & \text{sur } I, \text{ si } u(x) > 0 \text{ sur } I. \\ F(x) = \ln[-u(x)] + C & \text{sur } I, \text{ si } u(x) < 0 \text{ sur } I. \end{cases}$$