

Probabilités

1 Probabilités sur un ensemble fini

1.1 Vocabulaire

Soit \mathcal{E} une expérience aléatoire (expérience dont on ne peut prédire le résultat).

Définition 1 On appelle univers des possibles, et on note Ω , l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire \mathcal{E} . Un élément de Ω est appelé événement élémentaire.

Définition 2 Un événement est un sous-ensemble (ou partie) de Ω . L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω est l'ensemble des événements liés à l'expérience aléatoire \mathcal{E} .

Exemple 1 On lance un dé.

L'événement A : "le résultat est pair" se note $A = \{2; 4; 6\}$

L'événement B : "le résultat est supérieur ou égal à 5" se note $B = \{5; 6\}$.

Remarque 1 Ω est l'événement certain. Il est toujours réalisé.

Remarque 2 \emptyset est l'événement impossible. Il n'est jamais réalisé.

Définition 3 L'événement "A ou B" noté $A + B$ ou $A \cup B$ est l'événement constitué des éléments qui sont dans l'un ou l'autre des événements A et B .

Dans l'exemple 1 : $A \cup B = \{2; 4; 5; 6\}$

Définition 4 L'événement "A et B" noté $A.B$ ou $A \cap B$ est l'événement constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B .

Dans l'exemple 1 : $A \cap B = \{6\}$

Définition 5 On note \bar{A} l'événement dont les éléments ne sont pas dans A .

Dans l'exemple 1 : $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$ et $\bar{B} = \{1; 2; 3; 4\}$.

Définition 6 Deux événements A et B sont dits incompatibles (ou disjoints) si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Remarque 3 Les événements élémentaires sont incompatibles 2 à 2

Dans l'exemple 1, A et B ne sont pas incompatibles car $A \cap B = \{6\}$.

1.2 Fréquence d'un événement - Probabilité

Soit A un événement lié à une expérience aléatoire \mathcal{E} .

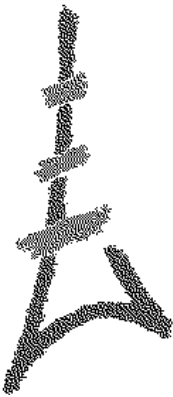
Répetons n fois cette expérience.

Soit n_A le nombre de réalisations de A lors de ces n répétitions.

La fréquence de A est $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$

L'expérience montre que lorsque n devient de plus en plus grand, $f_n(A)$ tend à se stabiliser autour d'un nombre p .

Ce nombre p s'appelle alors probabilité de l'événement A et se note $P(A)$.



Par exemple, si on lance une pièce de monnaie non truquée, la fréquence de l'événement pile tend à se stabiliser vers $\frac{1}{2}$ lorsqu'on lance la pièce un grand nombre de fois.

Propriétés des fréquences:

1. $f_n(\Omega) = 1$ car Ω étant toujours réalisé : $n_\Omega = n$
2. $f_n(A) \in [0; 1]$ car $0 \leq n_A \leq n$
3. Si A et B sont incompatibles, $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ car $n_{A \cup B} = n_A + n_B$.

Ces propriétés conduisent à poser la définition suivante :

Définition 7 On appelle probabilité toute application de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des événements vers \mathbb{R} telle que :

1. Pour tout événement $A : 0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si $A \cap B = \emptyset$, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Remarque 4 La probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires composant A . Dans l'exemple 1, $P(A) = P(2) + P(4) + P(6)$

Cas particulier : L'équiprobabilité :

Définition 8 On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité.

$$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\} \Rightarrow P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n)$$

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = p \Rightarrow 1 = np \Rightarrow p = \frac{1}{n}$$

Si l'univers Ω comporte n événements élémentaires équiprobables, la probabilité de chacun d'eux est $\frac{1}{n}$

Soit maintenant A un événement de Ω .

$$A = \{e_1; e_2; \dots; e_p\} \Rightarrow P(A) = P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_p) = \frac{p}{n}$$

p est le nombre de résultats favorables à la réalisation de A , n est le nombre de résultats possibles.

On écrit alors : S'il y a équiprobabilité: $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Remarque 5 Puisque $\Omega = A \cup \bar{A}$, que $P(\Omega) = 1$ et que A et \bar{A} sont incompatibles : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Cas particulier : Si $A = \Omega$, $\bar{A} = \emptyset$ et donc : $P(\emptyset) = 0$

Théorème 1 Pour tout événement A et tout événement B , on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Démonstration

$A \cap B$	$\bar{A} \cap B$	B
$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	\bar{B}
A	\bar{A}	

La première colonne du tableau représente l'événement A

La première ligne du tableau représente l'événement B

Le tableau entier représente Ω

On a $A \cup B = [A \cap \bar{B}] \cup [A \cap B] \cup [\bar{A} \cap B]$

$A \cap \bar{B}$, $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ étant incompatibles, on a $P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

De plus : $A = [A \cap B] \cup [A \cap \bar{B}]$ avec $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ incompatibles.

Donc : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$, d'où $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

De même : $B = [A \cap B] \cup [\bar{A} \cap B]$ avec $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ incompatibles.

Donc : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$, d'où $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

2 Notions d'analyse combinatoire

2.1 Principe multiplicatif

Rappel : L'ensemble noté $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$.

Si $F = E$, $E \times F$ se note aussi E^2 .

$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est l'ensemble des p -uplets (x_1, x_2, \dots, x_p) où $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_p \in E_p$

Si un ensemble E possède n éléments, on note $\text{card}(E) = n$ ou $|E| = n$

Proposition 1 $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$

Démonstration. Supposons que $E = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ et $F = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. $E \times F$ est l'ensemble des couples (a_i, b_j) . Rangeons les couples dans un tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes de sorte que le couple (a_i, b_j) soit situé à l'intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne.

Alors, chaque couple apparaît une et une seule fois.

Comme il y a mn cases, on en déduit le résultat.

Proposition 2 $\text{card}(E \times F \times G) = \text{card}(E) \times \text{card}(F) \times \text{card}(G)$

Démonstration. Supposons que $E = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\}$, $F = \{b_1, b_2, \dots, b_{n_2}\}$ et $G = \{c_1, c_2, \dots, c_{n_3}\}$. Chaque triplet (a_i, b_j, c_k) peut être considéré comme un couple $((a_i, b_j), c_k)$. Comme il y a $n_1 n_2$ couples (a_i, b_j) et n_3 éléments c_k , le résultat sur les couples permet de conclure.

Plus généralement, on montre :

Proposition 3 $\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_p)$

Beaucoup d'applications pratiques sont basées sur la reformulation de cette proposition. C'est le principe multiplicatif. Principe que l'on peut également énoncer :

- p décisions successives avec exactement n_k choix possibles à la $k^{\text{ème}}$ étape produisent au total $n_1 n_2 \dots n_p$ résultats distincts.
- Une épreuve aléatoire \mathcal{E} constituée de la succession de p épreuves élémentaires $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_p$ ayant respectivement n_1, n_2, \dots, n_p issues possibles comporte $n_1 n_2 \dots n_p$ issues.

2.2 Combinaisons

Définition 9 On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble E comportant n éléments ($n \geq p$), toute partie de E à p éléments. On note C_n^p le nombre de combinaisons d'ordre p d'un ensemble à n éléments

Propriétés :

1. Si l'ensemble E comporte n éléments, prendre p éléments dans E est équivalent à en laisser $n - p$. Il y a donc autant de façons de choisir p éléments parmi n que d'en laisser $n - p$. Or, il y a C_n^p façons de choisir p éléments parmi n et il y a C_n^{n-p} façons de délaisser $n - p$ éléments parmi n . On a donc $C_n^p = C_n^{n-p}$

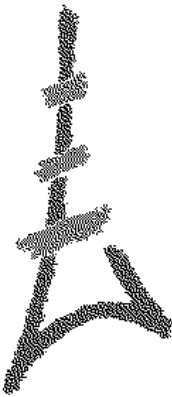
2. Il n'y a qu'une seule façon de ne choisir aucun élément parmi n . On a donc $C_n^0 = 1$

3. De même : $C_n^1 = n$ et $C_n^n = 1$

Théorème 2 si $p \leq n$, $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Démonstration. Pour construire une partie à p éléments de E , on peut :

1. Choisir un élément α dans E . Il y a n choix possibles
2. Choisir $(p - 1)$ éléments dans $E - \{\alpha\}$. Il y a C_{n-1}^{p-1} choix possibles.



Il y a donc $n \times C_{n-1}^{p-1}$ choix possibles pour construire une partie à p éléments de E selon ce procédé. Cependant, ce procédé fait apparaître p fois la même partie. En effet : par exemple, la partie $\{x_1; x_2; x_3; \dots; x_p\}$ est obtenue :

- en choisissant x_1 puis $\{x_2; x_3; \dots; x_p\}$
- en choisissant x_2 puis $\{x_1; x_3; \dots; x_p\}$
-
- en choisissant x_p puis $\{x_1; x_2; x_3; \dots; x_{p-1}\}$

On a donc $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$ d'où $C_n^p = \frac{n}{p}C_{n-1}^{p-1}$. En réitérant ce résultat, on obtient :

$$C_n^p = \frac{n}{p}C_{n-1}^{p-1} = \frac{n}{p} \frac{n-1}{p-1} C_{n-2}^{p-2} = \frac{n}{p} \frac{n-1}{p-1} \frac{n-2}{p-2} C_{n-3}^{p-3} = \dots = \frac{n}{p} \frac{n-1}{p-1} \frac{n-2}{p-2} \dots \frac{n-p+1}{1} C_{n-p}^0$$

D'où le résultat puisque $C_{n-p}^0 = 1$

Remarque 6 Le théorème précédent peut être reformulé de la façon suivante :

Dans un ensemble comportant n éléments il y a C_n^p façons d'en choisir p

Remarque 7 Soit E un ensemble comportant n éléments et soit α un élément de E . Répartissons les parties de E à p éléments en deux classes : celles qui contiennent α et celles qui ne le contiennent pas. Dans la première classe il y a C_{n-1}^{p-1} parties (il faut choisir $p - 1$ éléments pour compléter α et les choisir parmi les $n - 1$ restants puisque α est déjà choisi) et dans la deuxième il y en a C_{n-1}^p (il faut choisir p éléments parmi $n - 1$ puisqu'on ne veut pas α). Comme il y a en tout C_n^p parties de E à p éléments :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

Cette dernière formule permet de construire le célèbre triangle de PASCAL:

$$\begin{array}{cccccccc}
 C_0^0 & = & 1 & & & & & & \\
 C_1^0 & = & 1 & C_1^1 & = & 1 & & & \\
 C_2^0 & = & 1 & C_2^1 & = & 2 & C_2^2 & = & 1 \\
 C_3^0 & = & 1 & C_3^1 & = & 3 & C_3^2 & = & 3 & C_3^3 & = & 1 \\
 C_4^0 & = & 1 & C_4^1 & = & 4 & C_4^2 & = & 6 & C_4^3 & = & 4 & C_4^4 & = & 1 \\
 C_5^0 & = & 1 & C_5^1 & = & 5 & C_5^2 & = & 10 & C_5^3 & = & 10 & C_5^4 & = & 5 & C_5^5 & = & 1
 \end{array}$$

Chaque nombre du triangle s'obtient en ajoutant le nombre écrit au dessus de lui et son voisin de gauche.

2.3 Formule du binôme de NEWTON

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

Démonstration. On a : $(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b) \dots (a + b)}_{n \text{ fois}}$

Le développement de ce produit donne une somme de termes de la forme $a^k b^{n-k}$ (on prend a dans k facteurs et b dans les $n - k$ restants) , k prenant toutes les valeurs entières de 0 à n .

Or il y a C_n^k façons de choisir k facteurs parmi n , donc le coefficient de $a^k b^{n-k}$ est C_n^k .
 D'où : $(a + b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n b^0$.

3 Probabilités conditionnelles

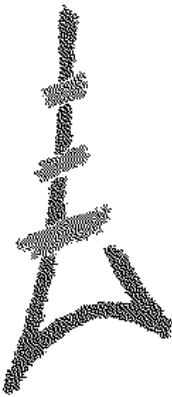
3.1 Exercice introductif

Dans un lycée, les élèves doivent étudier obligatoirement l'anglais ou l'allemand en langue 1.

La répartition est la suivante :

	Anglais	Allemand
Garçons	35	17
Filles	41	23

On choisit un élève au hasard. Calculer la probabilité des événements :



F : “l’élève est une fille” G : “l’élève est un garçon”
 A : “l’élève étudie l’anglais” D : “l’élève étudie l’allemand”

On choisit un garçon au hasard. Quelle est la probabilité qu’il étudie l’anglais ?
 On notera cette dernière probabilité $P(A/G)$ et on lira probabilité de A sachant G .
 Vérifier que $P(A \cap G) = P(A/G)P(G)$.

3.2 Définition

Définition 10 Soit B un événement de probabilité non nulle d’un univers Ω . Soit A un événement quelconque de Ω . On appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé et on note $P(A/B)$

ou $P_B(A)$ le nombre défini par $P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Remarque 8 $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$ c’est la formule des probabilités composées.

Exemple 2 Une entreprise fabrique un article dans deux usines A et B qui produisent respectivement 60% et 40% du nombre total des articles. On a constaté que le pourcentage d’articles défectueux est de 5% pour l’usine A et de 3% pour l’usine B .

1. On prélève au hasard un article dans la production totale. Calculer la probabilité que cet article soit défectueux.
2. On considère un article défectueux. Calculer la probabilité que cet article provienne de l’usine A .

3.3 Événements indépendants

Définition 11 Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Remarque 9 Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ on a alors $P(A/B) = P(A)$ et $P(B/A) = P(B)$. Cela justifie la définition.

3.4 Formule des probabilités totales

Théorème 3 Si B_1, B_2, \dots, B_n forment une partition de Ω (cela signifie que $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ et que les B_k sont deux à deux disjoints) alors, pour tout événement A :

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$$

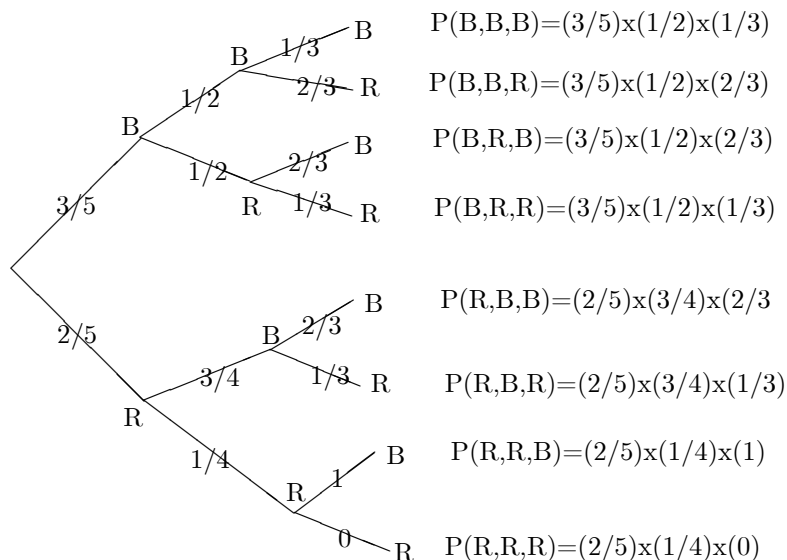
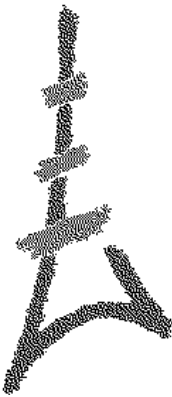
Démonstration. Cela découle du fait que $(A \cap B_1), (A \cap B_2), \dots, (A \cap B_n)$ est une partition de A .

3.5 Arbres pondérés

Pour calculer des probabilités conditionnelles, il peut être utile de construire un arbre. Tout chemin menant de la racine à un noeud est appelé trajet

1. Les événements se trouvant aux extrémités des branches primaires constituent une partition de Ω .
2. Le poids d’une branche primaire est la probabilité de l’événement qui se trouve à son extrémité.
3. Le poids d’une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l’événement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.
4. Le poids ou la probabilité d’un trajet est le produit des poids des branches le constituant.
5. La probabilité d’un événement associé à plusieurs trajets complets est la somme des probabilités de ces trajets.

Exemple 3 Une urne contient trois boules blanches et deux boules rouges. On tire successivement et sans remise trois boules de l’urne. On obtient l’arbre pondéré suivant :



L'application de la troisième règle donne :

La probabilité que la deuxième boule soit blanche sachant que la première était rouge est $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

L'application de la quatrième règle donne :

La probabilité que les trois boules soient rouges est $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 0 = 0$

Remarque 10 La somme des poids des branches primaires vaut 1.

Remarque 11 La somme des poids des branches secondaires issues d'un même noeud vaut 1.

4 Variables aléatoires

Définition 12 On appelle variable aléatoire (ou aléa) définie sur Ω toute application X de Ω dans \mathbb{R} .

Notations :

- $(X = \alpha) = X^{-1}(\alpha) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = \alpha\}$
- $(X \leq \alpha) = X^{-1}]-\infty; \alpha] = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq \alpha\}$
- $(a < X \leq b) = X^{-1}]a; b] = \{\omega \in \Omega / a < X(\omega) \leq b\}$

Exemple 4 On lance un dé non truqué. On gagne 1 € si le 1 apparaît, 6 € si c'est le 6 et on perd 2 € dans tous les autres cas. Soit X la variable aléatoire associant à chaque lancer le gain obtenu.

$$(X = 1) = \{1\} \quad ; \quad (X = 6) = \{6\} \quad ; \quad (X = -2) = \{2; 3; 4; 5\} \quad ; \quad (X \geq 0) = \{1; 6\}$$

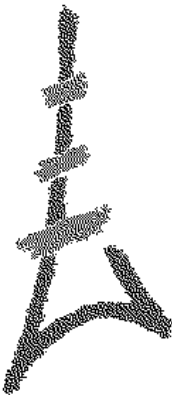
Remarque 12 Si $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ alors Ω est la réunion disjointe des événements $(X = x_k)$.

On en déduit $P(\Omega) = \sum_{k=1}^n P(X = x_k)$ et donc $\sum_{k=1}^n P(X = x_k) = 1$

4.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition 13 On appelle loi de probabilité (ou distribution) de la variable aléatoire discrète X définie sur l'univers Ω l'application de $X(\Omega)$ dans $[0; 1]$ qui à chaque valeur x_k de $X(\Omega)$ fait correspondre la probabilité de l'événement $(X = x_k)$

Remarque 13 La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X se présente généralement sous la forme d'un tableau de valeurs et se représente à l'aide d'un diagramme en bâtons ou d'un histogramme.



4.2 Espérance mathématique - Variance - Ecart-type

Soit \mathcal{E} une expérience aléatoire et soit Ω l'univers des possibles. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$.

Définition 14 On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le nombre défini par

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$$

Remarque 14 $P(X = x_k)$ représentant la limite de la fréquence de l'événement $(X = x_k)$ à l'issue d'une infinité de répétitions de \mathcal{E} , $E(X)$ représente la limite de la moyenne des valeurs prises par X à l'issue d'une infinité de répétitions de \mathcal{E} .

Théorème 4 Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur Ω et si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad ; \quad E(\lambda X) = \lambda E(X)$$

Corollaire 1 Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur Ω ,

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

Définition 15 On appelle variance de X et on note $V(X)$ ou $\sigma^2(X)$ le nombre défini par

$$\sigma^2(X) = \sum_{k=1}^n [x_k - E(X)]^2 P(X = x_k)$$

Définition 16 L'écart-type de X , noté $\sigma(X)$, est défini par : $\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$

Théorème 5 $\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (E(X - E(X)))^2$

Théorème 6 Si X est une variable aléatoire définie sur l'univers Ω et si $\lambda \in \mathbb{R}$: $\sigma^2(\lambda X) = \lambda^2 \cdot \sigma^2(X)$

Remarque 15 En général, on n'a pas $\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$.

4.3 Schéma de Bernoulli

Définition 17 Une épreuve de Bernoulli est une épreuve ayant deux issues possibles :

1. l'issue S avec la probabilité p
2. l'issue \bar{S} avec la probabilité $1 - p$.

Définition 18 Un schéma de Bernoulli est la répétition n fois, **de manière indépendante**, d'une épreuve de Bernoulli.

Définition 19 Soit X la variable aléatoire associant, à l'issue d'un schéma de Bernoulli à n répétitions indépendantes de l'épreuve \mathcal{E} , le nombre de réalisations de S . Alors on dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$.

Théorème 7 Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$: $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$; $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$