

Fonctions puissances

1 Définition

Théorème 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. Donc il existe $a > 0$ tel que $f_n(a) > \lambda$.

f_n est dérivable et strictement croissante sur $[0; a]$

Donc f_n est une bijection de $[0; a]$ sur $[f_n(0); f_n(a)]$.

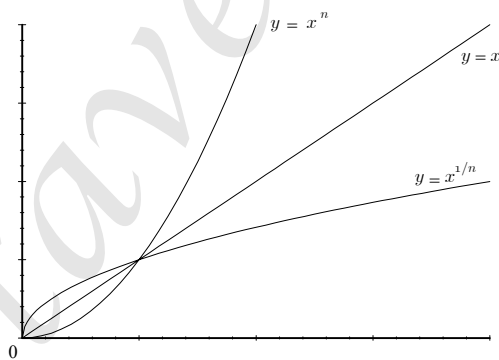
$\lambda \in [f_n(0); f_n(a)]$ donc il existe un et un seul réel α de $[0; a]$ tel que $f_n(\alpha) = \lambda$.

Les variations de f_n montrent que l'équation $f_n(x) = \lambda$ n'a pas de solution dans $]a; +\infty[$.

Définition 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine $n^{\text{ième}}$ du nombre **positif** a le nombre réel positif b tel que $b^n = a$. Ce nombre se note $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{1/n}$.

Exemple 1 $\sqrt[3]{27} = 3$ et $\sqrt[4]{16} = 2$

Les fonctions f_n et racine nième sont réciproques, donc leurs courbes représentatives sont, dans un repère orthonormal, symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



Définition 2 Pour tout réel $a > 0$ et tout réel b , on définit a^b par

$$a^b = e^{b \ln a}$$

Remarque 1 Cette définition est cohérente avec le résultat $a^n = e^{n \ln a}$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 2 Lorsque $b \in \mathbb{Z}$, a^b est défini pour tout réel a **non nul**.

Lorsque $b \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, a^b n'est défini que pour $a > 0$.

Théorème 2 $\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R} : \ln a^b = b \ln a$

Démonstration. $\ln a^b = \ln e^{b \ln a} = b \ln a$.

Théorème 3 $\forall a > 0, \forall a' > 0, \forall b \in \mathbb{R}$ et $\forall b' \in \mathbb{R}$:

1. $1^b = 1$
2. $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$
3. $(aa')^b = a^b a'^b$
4. $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$
5. $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$
6. $\frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b$

Démonstration. Utiliser la définition

2 Etude de $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

La fonction f_α est définie sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[: f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

2.1 Dérivée

Théorème 4 La fonction f_α est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Démonstration. La fonction \ln étant dérivable sur $]0; +\infty[$ et la fonction \exp étant dérivable sur \mathbb{R} , la fonction f_α définie par $f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

De plus : $f'_\alpha(x) = (\alpha \ln x)' e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$.

Remarque 3 f'_α a même signe que α . Donc f_α est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ lorsque $\alpha > 0$ et est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ lorsque $\alpha < 0$.

Remarque 4 Le théorème de dérivation d'une fonction composée permet d'écrire :

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si u est une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I , la fonction u^α est dérivable sur I et

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

2.2 Limites

Théorème 5 Si $\alpha > 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$

Démonstration. On pose $t = \alpha \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha \ln x = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\alpha \ln x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha \ln x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$$

Théorème 6 Si $\alpha < 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$

Démonstration. Identique à la précédente.

3 Croissance comparée

Si $\alpha > 0$, les fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
Donc les fonctions $x \mapsto \frac{\ln x}{x^\alpha}$ et $x \mapsto \frac{x^\alpha}{e^x}$ présentent une forme indéterminée en $+\infty$.

Théorème 7 Si $\alpha > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$

Démonstration.

1. On pose $t = x^\alpha$.

On a $\ln t = \ln x^\alpha = \alpha \ln x$ d'où $\ln x = \frac{1}{\alpha} \ln t$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\alpha} \ln t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\ln t}{t} = 0$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha \ln x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha \ln x - x}$

On pose $t = \alpha \ln x - x$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha x \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{\alpha} \right) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\alpha \ln x - x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$

Corollaire 1 Si $\alpha > 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$

Démonstration. On pose $t = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^\alpha} \ln \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\ln t}{t^\alpha} = 0$