Similitudes

1 Définition

Définition 1 Soit Ω un point du plan, k un réel **strictement positif.** On appelle similitude directe de centre Ω et de rapport k la transformation du plan qui admet Ω pour point fixe, qui conserve les angles orientés et qui multiplie les distances par k. C'est à dire que pour tous points A, B, C d'images respectives A', B', C' : $A'B' = k.AB$ et $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

Remarque 1 Pour tout point M d'image M' : $\boxed{\Omega M' = k.\Omega M}$

Remarque 2 Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' : $\boxed{\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega N'}\right)}$

En effet : $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega N}, \overrightarrow{\Omega N'}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega N'}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$

et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega N'}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = 0$ par définition de la similitude.

Définition 2 On appelle angle de la similitude l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$ *(qui ne dépend pas de M).*

Théorème 1 La similitude S de centre Ω de rapport $k > 0$ et d'angle θ est donc définie par

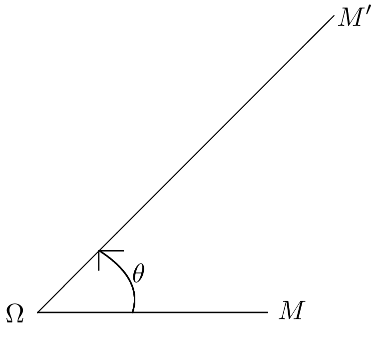
$$\Omega \text{ est fixe : } S(\Omega) = \Omega$$
$$M \neq \Omega \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Omega M' = k.\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \end{array} \right.$$

Remarque 3 La similitude de centre Ω de rapport $k > 0$ et d'angle $\theta = 0$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

Remarque 4 La similitude de centre Ω de rapport 1 et d'angle θ est la rotation de centre Ω d'angle θ.

Théorème 2 Une similitude directe est entièrement déterminée par la connaissance de son centre, un autre point et son image.

Démonstration. Si Ω est le centre et si on connaît $M \neq \Omega$ et M' image de M, alors on connaît $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$.



2 Ecriture complexe

La similitude directe de centre Ω d'affixe ω, de rapport $k>0$ et d'angle θ associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que

$$z'-\omega=ke^{i\theta}\left(z-\omega\right)$$

En effet : Si $M\neq\Omega$:
$\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}=k\Rightarrow\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=k$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta\Rightarrow\arg\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}=\theta$
Donc $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}=ke^{i\theta}$ et $z'-\omega=ke^{i\theta}\left(z-\omega\right)$. Cette dernière égalité est également vérifiée si $z=\omega$.
La similitude directe de centre Ω de rapport $k>0$ et d'angle θ a donc une écriture complexe de la forme $z'=az+b$ avec $a=ke^{i\theta}$.
Réciproquement, si f est une transformation d'écriture complexe $z'=az+b$ avec $a=ke^{i\theta}$

- $a=1\Rightarrow f=t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}$ d'affixe b
- Si $a\neq1$ l'équation $z=az+b$ admet une solution $\omega=\dfrac{b}{1-a}$ affixe d'un point Ω.
  $\left.\begin{array}{r}z'=az+b\\ \omega=a\omega+b\end{array}\right\}\Rightarrow z'-\omega=a\left(z-\omega\right)$
  On reconnaît l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω de rapport $k>0$ et d'angle θ.

On peut donc énoncer :

Théorème 3 La transformation d'écriture complexe $z'=az+b$ avec $a=ke^{i\theta}$ et $k>0$ est :

1. la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b si $a=1$
2. une similitude directe si $a\neq1$.
   (a) le centre Ω a pour affixe la solution de $z=az+b$
   (b) le rapport est $|a|$
   (c) l'angle est $\arg\left(a\right)$

3 Décomposition

Soit S la similitude directe de centre Ω de rapport $k>0$ et d'angle θ.
Son écriture complexe est $z'-\omega=ke^{i\theta}\left(z-\omega\right)$
Soit r la transformation d'écriture complexe $z'-\omega=e^{i\theta}\left(z-\omega\right)$ et soit h la transformation d'écriture complexe $z'-\omega=k\left(z-\omega\right)$.
Alors $S=r\circ h=h\circ r$
En effet h associe au point M d'affixe z le point M_1 d'affixe z_1 telle que $z_1-\omega=k\left(z-\omega\right)$
r associe au point M_1 d'affixe z_1 le point M' d'affixe z' telle que

$$z'-\omega=e^{i\theta}\left(z_1-\omega\right)=ke^{i\theta}\left(z-\omega\right)$$

Donc $r\circ h$ associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que $z'=ke^{i\theta}\left(z-\omega\right)$.
Donc $S=r\circ h$. On démontre de même que $S=h\circ r$
r est la rotation de centre Ω et d'angle θ et h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

Théorème 4 La similitude directe de centre Ω de rapport $k>0$ et d'angle θ est la composée de l'homothétie de centre Ω et de rapport k avec la rotation de centre Ω et d'angle θ.

4 Propriétés

Des propriétés des rotations et des homothéties, on déduit :

Théorème 5 Si f est une similitude directe :

1. l'image du segment $[AB]$ est le segment $[f(A)\, f(B)]$
2. l'image de la droite (AB) est la droite $(f(A)\, f(B))$
3. l'image du cercle de centre Ω et de rayon R est le cercle de centre $f(\Omega)$ et de rayon kR.
4. f conserve le parallélisme : deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.
5. f conserve l'orthogonalité :
   deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.
6. f conserve les milieux : si I est milieu de $[AB]$, $f(I)$ est milieu de $[f(A)\, f(B)]$
7. f conserve les barycentres :
   Si $G = \text{bar}\left\{(A_1;\alpha_1);\cdots;(A_n;\alpha_n)\right\}$ alors $f(G) = \text{bar}\left\{(f(A_1);\alpha_1);\cdots;(f(A_n);\alpha_n)\right\}$
8. f conserve le contact.