



Suites

1 Suites arithmétiques

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ de nombres réels ou complexes est une suite arithmétique de raison r si

$$\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n + r$$

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r .

1. $\forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0 :$

$$u_n = u_p + (n - p)r \quad (1)$$

2. (a) Si $r = 0$, $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante.
(b) Si $r \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
(c) Si $r \in \mathbb{R}$ et $r < 0$, $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

3. Pour calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$, on utilise la formule (1) et le résultat suivant :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2 Suites géométriques

Une suite de nombres réels ou complexes $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q si

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q .

1. Si $q \neq 0, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0 :$

$$u_n = u_p \times q^{n-p} \quad (2)$$

2. (a) Si $q = 1$, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante.
(b) Si $q \in \mathbb{R}$ et $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
(c) Si $q \in \mathbb{R}$ et $q \leq -1$, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ n'a pas de limite.
(d) Si $0 \leq |q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

3. Pour calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$, on utilise la formule explicite et le résultat suivant :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

3 Suites monotones, majorées, minorées

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels.

1. $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante si $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} \geq u_n$
2. $(u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement croissante si $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} > u_n$
3. $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante si $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} \leq u_n$
4. $(u_n)_{n \geq n_0}$ est strictement décroissante si $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} < u_n$
5. $(u_n)_{n \geq n_0}$ est stationnaire si $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n$
6. $(u_n)_{n \geq n_0}$ est monotone si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est soit croissante soit décroissante.

Théorème 1 Si f est une fonction croissante sur $[n_0; +\infty[$, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ définie par $u_n = f(n)$ est croissante.

Remarque 1 On a un théorème analogue avec une fonction décroissante, strictement croissante, strictement décroissante.

Remarque 2 Attention : la réciproque est fautive : la suite peut être croissante alors que la fonction ne l'est pas.

Définition 1 Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels.

1. S'il existe un réel M tel que $\forall n \geq n_0 : u_n \leq M$, on dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée par M ou que M est un majorant de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.
2. S'il existe un réel m tel que $\forall n \geq n_0 : u_n \geq m$, on dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée par m ou que m est un minorant de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.
3. Une suite qui est la fois majorée et minorée est dite bornée.

Définition 2 Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes. S'il existe un entier non nul p tel que

$$\forall n \geq n_0 : u_{n+p} = u_n$$

on dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est périodique de période p .

4 Limites

Définition 3 Une suite (u_n) est convergente si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda \in \mathbb{R}$.

Une suite non convergente est une suite divergente.

Théorème 2 Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[n_0; +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda$$

Résultat valable si on remplace λ par $+\infty$ ou $-\infty$

Corollaire 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$ et si $\alpha > 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$

Théorème 3 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de I .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = b$$

Résultat également valable si a ou b ou les deux sont infinis.

Théorème 4

$$1. \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell' \\ \forall n \geq p : u_n \leq v_n \end{array} \right\} \Rightarrow \ell \leq \ell'$$

$$2. \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \\ \forall n \geq p : u_n \geq v_n \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$3. \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \\ \forall n \geq p : u_n \leq v_n \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

$$4. \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \\ \forall n \geq p : |u_n - \ell| \leq v_n \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

5. En particulier : Si $\forall n \geq p : |u_n - \ell| \leq \alpha q^n$ avec $\alpha > 0$ et $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Théorème 5 (dit des gendarmes)

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} \forall n \geq p : v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda}$$

5 Croissance comparée

Théorème 6 Si $\alpha > 0$ et $a > 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$

Démonstration. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$ d'après le théorème (2)

$\frac{a^n}{n^\alpha} = \frac{e^{n \ln a}}{e^{\alpha \ln n}} = e^{n(\ln a - \alpha \frac{\ln n}{n})}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ impliquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$ car $\ln a > 0$

Corollaire 2 Si $0 < a < 1$, pour tout nombre α : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = 0$

Démonstration. $\frac{a^n}{n^\alpha} = \frac{e^{n \ln a}}{e^{\alpha \ln n}} = e^{n(\ln a - \alpha \frac{\ln n}{n})}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ impliquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = -\infty$ car $\ln a < 0$