Devoir surveillé 1

Exercice 1 Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de modules 1 et tels que $1+z_1z_2\neq 0$. Montrer que $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel

Exercice 2 Soient a et b deux nombres complexes. Montrer que $|a|=1$ ou $|b|=1$ si et seulement si

$$|a-b|=|1-\bar{a}b|$$

Exercice 3 Soit $P(z)=z^4-3z^3+\dfrac{9}{2}z^2-3z+1$.

1. Calculer $P(1+i)$.
2. Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$.
3. Montrer que si α est racine de P, alors $\bar{\alpha}$ est racine de P.
4. Montrer que si α est racine de P, $\dfrac{1}{\alpha}$ est racine de P.
5. Déterminer toutes les racines de P.

Exercice 4 Soit f l'application du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z différente de $2-i$, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z'=\frac{z+3-2i}{z-2+i}$$

1. Donner une interprétation géométrique de $|z'|$.
2. En déduire l'ensemble des points M tels que $|z'|=1$
3. Donner une interprétation géométrique de $\arg(z')$.
4. En déduire l'ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur.
5. Retrouver les résultats de la question 2 par le calcul.
6. Retrouver les résultats de la question 4 par le calcul.

Exercice 5 Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ et soit l'équation

$$z^2-\alpha z+(1+i)\alpha-2i=0 \qquad (E)$$

1. Montrer qu'il existe une et une seule valeur de α telle que l'équation E admette deux solutions complexes conjuguées.
2. En utilisant la valeur de α trouvée, résoudre alors (E).