Devoir surveillé 10

Exercice 1

1. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}dx$.

   (a) Á l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

   (b) Prouver que , pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx$.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

   (c) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n non nul, on a: $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!} - I_n$

2. On considère la suite réelle (a_n), définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{1}{e} + (-1)^n I_n$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 2 (spécialistes) Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4\times 10^n - 1 \quad b_n = 2\times 10^n - 1 \text{ et } c_n = 2\times 10^n + 1$$

1. (a) Calculer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 et c_3.

   (b) Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

   (c) Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

   (d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.
   En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6

   (e) Montrer que $PGCD\ (b_n, c_n) = PGCD\,(c_n, 2)$. En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation : (1) $\qquad b_3x + c_3y = 1$ d'inconnues les entiers relatifs x et y.

   (a) Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.

   (b) Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3; en déduire une solution particulière de (1)

   (c) Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :
2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97.

Exercice 3 (non spécialistes) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives i et $(-i)$. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distincte de $(-i)$ associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{1+iz}{z+i}$

1. Quelle est l'image par l'application f du point O ?

2. Quel est le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe $1+i$?

3. Montrer que l'équation $\dfrac{1+iz}{z+i} = z$ admet deux solutions que l'on déterminera.

4. Vérifier que $z' = \dfrac{i\,(z-i)}{z+i}$
   En déduire $OM' = \dfrac{AM}{BM}$ et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

5. Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situés sur un même cercle (C) que l'on précisera.

6. Soit M un point du cercle de diamètre $[AB]$ différent de A et B. Montrer que son image M' est située sur l'axe des abscisses.

Exercice 4

1. **Préliminaires**

   (a) Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^t - t - 1$
   Quel est le minimum de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$?

   (b) En déduire les inégalités suivantes :

   i. Pour tout réel t : $e^t \geqslant t+1$; $e^t > t$ et $-te^{-t} > -1$

   ii. Pour tout réel $t > -1$: $\ln(1+t) \leqslant t$

   iii. En déduire que pour tout réel x : $\ln\left(1 - xe^{-x}\right) \leqslant -xe^{-x}$

2. **Étude d'une fonction**
   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x)$

   (a) Montrer que $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln\left(1 - xe^{-x}\right)$
   Quelle est la limite de f en $+\infty$?
   On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est $+\infty$.

   (b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.

   (c) Dans un repère orthonormal (unité 3 cm), on considère la parabole (P) d'équation $y = x^2 - 2x$ et (C) la courbe représentative de la fonction f. Montrer que (C) et (P) sont asymptotes en $+\infty$. Étudier les positions relatives des courbes (C) et (P).

   (d) Donner une équation de chacune des tangentes D et D' respectivement aux courbes (P) et (C) au point d'abscisse 0.

   (e) Tracer dans un même repère les courbes (C) et (P) et leurs tangentes D et D'.

3. **Étude d'une intégrale**

   (a) Soit n un entier naturel. On pose : $u_n = \displaystyle\int_0^n xe^{-x}dx$

   i. Démontrer que la suite u de terme général u_n est croissante.

   ii. Calculer u_n à l'aide d'une intégration par parties.

   iii. Déterminer la limite de la suite (u_n).

   (b) L'aire du domaine (en unités d'aire) limité par les droites d'équation $x = 0$ et $x = n$, la parabole (P) et la courbe (C) est définie par $I_n = -2\displaystyle\int_0^n \ln\left(1 - xe^{-x}\right)dx$

   i. Montrer en utilisant les préliminaires que $I_n \geqslant 2u_n$

   ii. On admet que la suite (I_n) a pour limite l. Montrer que $l \geqslant 2$.