

# Devoir surveillé 11

**Exercice 1** Afin de créer une loterie, on met dans une urne  $n$  billets différents ( $n$  supérieur ou égal à 3), dont deux et deux seulement sont gagnants.

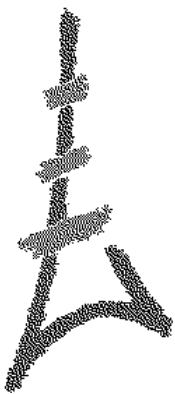
1. Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billets dans l'urne.
  - (a) On suppose ici  $n = 10$ .  $X$  désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis.  
Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
  - (b) On revient au cas général avec  $n$  supérieur ou égal à 3.  
Calculer la probabilité, notée  $p_n$ , d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.
2. Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier billet tiré avant de tirer le second.
  - (a) On suppose ici  $n = 10$ .  $Y$  désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux billets choisis. Déterminer la loi de probabilité de  $Y$ .
  - (b) On revient au cas général avec  $n$  supérieur ou égal à 3.  
Calculer la probabilité, notée  $q_n$ , d'avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.
3.
  - (a) Montrer que pour tout  $n$  supérieur ou égal à 3, on a :  $p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$ .
  - (b) En remarquant que pour tout entier  $n$ ,  $n-2$  est inférieur à  $n-1$ , déterminer un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ , on ait  $p_n - q_n < 10^{-3}$ .
  - (c) Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il préférable de les tirer simultanément ou de les tirer l'un après l'autre en remettant le premier billet tiré ?

## Exercice 2 (Spécialistes)

1. Le plan  $(P)$  est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .  
Soit  $A$  et  $B$  dans ce plan d'affixes respectives  $a = 1 + i$  ;  $b = -4 - i$ .  
Soit  $f$  la transformation du plan  $(P)$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que

$$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$$

- a. Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$ .
  - b. Montrer que  $f$  admet un seul point invariant  $\Omega$  dont on donnera l'affixe. En déduire que  $f$  est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
2. On se place dans le cas où les coordonnées  $x$  et  $y$  de  $M$  sont des entiers naturels avec  $1 \leq x \leq 8$  et  $1 \leq y \leq 8$ .  
Les coordonnées  $(x', y')$  de  $M'$  sont alors :  $x' = 3x + 2$  et  $y' = 3y - 1$ .
    - a. On appelle  $G$  et  $H$  les ensembles des valeurs prises par respectivement  $x'$  et  $y'$ .  
Écrire la liste complète des éléments de  $G$  et  $H$ .
    - b. Montrer que  $x' - y'$  est un multiple de 3



- c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité.  
On se propose de déterminer tous les couples  $(x', y')$  de  $G \times H$  tels que  $m = x'^2 - y'^2$  soit un multiple non nul de 60.
- d. Montrer que dans ces conditions, le nombre  $x' - y'$  est un multiple de 6. Le nombre  $x' - y'$  peut-il être un multiple de 30 ?
- e. En déduire que si  $x'^2 - y'^2$  est un multiple non nul de 60,  $x' + y'$  est un multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples  $(x', y')$  qui conviennent.  
En déduire les couples  $(x, y)$  correspondants aux couples  $(x', y')$  trouvés.

**Exercice 3 (non spécialistes)** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , (unité graphique : 4 cm), on donne les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives 1 et  $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Pour chaque point  $M$  du plan, d'affixe  $z$ ,  $M_1$  d'affixe  $z_1$  désigne l'image de  $M$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ , puis  $M'$  d'affixe  $z'$  l'image de  $M_1$  par la translation de vecteur  $-\vec{u}$ . Enfin, on note  $T$  la transformation qui à chaque point  $M$  associe le point  $M'$ .

1. (a) Démontrer :  $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1$   
 (b) Déterminer l'image du point  $B$ .  
 (c) Montrer que  $T$  admet un unique point invariant dont on précisera l'affixe.
2. On pose  $z = x + iy$ , avec  $x$  et  $y$  réels.
  - (a) Pour  $z$  non nul, calculer la partie réelle du quotient  $\frac{z'}{z}$  en fonction de  $x$  et de  $y$ .
  - (b) Démontrer que l'ensemble  $(E)$ , des points  $M$  du plan tels que le triangle  $OMM'$  soit rectangle en  $O$ , est un cercle  $(C)$ , dont on précisera le centre et le rayon, privé de deux points. Tracer  $(E)$ .
3. Dans cette question on pose  $z = 1 + i$ .
  - (a) Vérifier que  $M$  appartient à  $(E)$ . Placer  $M$  et  $M'$  sur la figure.
  - (b) Calculer le module de  $z'$ .
  - (c) Calculer l'aire, en  $\text{cm}^2$ , du triangle  $OMM'$ .

**Exercice 4** On désigne par  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées  $f_n$ , qui sont définies pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :  $f_n(x) = \frac{1 + n \ln(x)}{x^2}$

**PARTIE A**

**I : Etude des fonctions  $f_n$**

1. Calculer  $f'_n(x)$  et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est  $n - 2 - 2n \ln(x)$ .
2. Résoudre l'équation  $f'_n(x) = 0$ . Etudier le signe de  $f'_n(x)$
3. Déterminer la limite de  $f_n$  en  $+\infty$
4. Etablir le tableau de variation de la fonction  $f_n$  et calculer sa valeur maximale en fonction de  $n$ .

**II : Représentation graphique de quelques fonctions  $f_n$**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ( unité graphique : 5 cm ). On note  $(C_n)$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans ce repère.

1. Tracer  $(C_2)$  et  $(C_3)$ .
2. (a) Calculer  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ . Cette différence est-elle dépendante de l'entier  $n$  ?

- (b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe  $(C_4)$  à partir de  $(C_2)$  et  $(C_3)$ .

**PARTIE B**

## Calculs d'aires

1. Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale :  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$
2. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .
3. On note  $A_n$  l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe  $(C_n)$  et les droites d'équations  $y = 0$ ,  $x = 1$  et  $x = e$ .
  - (a) Calculer  $A_2$ .
  - (b) Déterminer la nature de la suite  $(A_n)$  en précisant l'interprétation graphique de sa raison.

**PARTIE C****Etude sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  de l'équation  $f_n(x) = 1$ .**

Dans toute la suite, on prendra  $n \geq 3$ .

1.
  - (a) Vérifier que, pour tout  $n$ ,  $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1$  et  $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$
  - (b) Vérifier que l'équation  $f_n(x) = 1$  n'a pas de solution sur l'intervalle  $]1; e^{\frac{n-2}{2n}}[$ .
2. Montrer que l'équation  $f_n(x) = 1$  admet sur l'intervalle  $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty\right[$  exactement une solution notée  $\alpha_n$ .
3. On se propose de déterminer la limite de la suite  $(\alpha_n)$ .
  - (a) Calculer  $f_n(\sqrt{n})$  et montrer que, pour  $n > e^2$ , on a  $f_n(\sqrt{n}) \geq 1$ .
  - (b) En déduire que, pour  $n \geq 8$ , on a  $\alpha_n \geq \sqrt{n}$  et donner la limite de la suite  $(\alpha_n)$ .