Devoir surveillé 12

Exercice 1 (spécialistes) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que : $a=1, \quad b=e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad c=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i, \quad d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

1. (a) Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d.
   (b) Représenter les points A, B, C et D.
   (c) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange.
2. Montrer que les points D, A et C sont alignés.
3. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.
4. On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points F, C et G sont alignés.
5. Déterminer l'affixe f du point F.
6. On considère la transformation φ qui à tout point M, d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}\,\bar{Z}+\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Pour toute droite δ du plan, on notera σ_δ la symétrie orthogonale d'axe δ.
   (a) Soit r la transformation qui à tout point M_1 d'affixe Z_1 associe le point M_1' d'affixe Z_1' telle que : $Z_1'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}\,Z_1+\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques.
   (b) En utilisant les nombres complexes, donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$, puis déterminer la droite Δ telle que : $r=\sigma_\Delta\circ\sigma_{(\mathrm{AO})}$.
   (c) Montrer que $\varphi=r\circ\sigma_{(\mathrm{AO})}$. En déduire la nature de φ

Exercice 2 (non spécialistes) On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k. (k est un entier et $1\leqslant k\leqslant 6$). Ce dé a été pipé de telle sorte que :

- les six faces ne sont pas équiprobables
- les nombres p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6 dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r.
- les nombres p_1,p_2,p_4 dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que $p_k=\dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1\leqslant k\leqslant 6$.
2. On lance ce dé une fois et on considère les événements suivants :
   A: "le nombre obtenu est pair"
   B: "le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3"
   C: "le nombre obtenu est 3 ou 4"
   (a) Calculer la probabilité de chacun de ces événements
   (b) Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

(c) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Les événements A et C sont-ils indépendants ?

3. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :
• d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires.
• d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire
Le joueur lance le dé :
• s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1
• s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2
On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche. On note G cet événement

   (a) Déterminer la probabilité de l'événement $G \cap A$ puis la probabilité de l'événement G.
   (b) Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

Exercice 3 Partie A. Etude préliminaire : mise en place d'une inégalité

1. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On désigne par Δ la droite d'équation $y = x + 1$ et par Γ la courbe d'équation $y = e^x$.
   (a) Que représente la droite Δ pour la courbe Γ ?
   (b) Tracer dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la droite Δ et donner l'allure de Γ.
2. (a) Démontrer que pour tout réel t, $e^t \geqslant t + 1$
Interpréter graphiquement ce résultat.
   (b) En déduire que pour tout réel t, $e^{-t} + t + 1 \geqslant 2$ et que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\dfrac{1}{x} + \ln x + 1 \geqslant 2$.

Partie B. Etude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = (x + 1) \ln x$. On appelle C la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm)

1. (a) Etudier le sens de variation de g en utilisant la partie A.
   (b) Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.
2. (a) Déterminer une équation de la tangente D à C au point d'abscisse 1.
   (b) On appelle h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = g(x) - 2x + 2$.
Etudier le sens de variation de h. On pourra utiliser la question A.2(b)
En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.
   (c) Etudier la position de C par rapport à D.
3. Tracer C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$
4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $U_n = \displaystyle\int_n^{n+1} g(x)\, dx$
   (a) Donner une interprétation géométrique de U_n.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $g(n) \leqslant U_n \leqslant g(n+1)$
   (c) En déduire le sens de variation de la suite (U_n).
   (d) La suite (U_n) est-elle convergente ?

Partie C. Etude d'une primitive

G désigne la primitive de g sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1
On a donc, pour x appartenant à $]0; +\infty[$: $G(x) = \displaystyle\int_1^x g(t)\, dt$

1. Quel est la signe de $G(x)$ suivant les valeurs de x ?
2. Calculer $G(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.
3. Déterminer les limites de G en 0 et en $+\infty$.
Pour l'étude en $+\infty$, on pourra mettre x^2 en facteur dans l'expression de $G(x)$.
Pour l'étude en 0, on admettra que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$