Devoir surveillé 2

Exercice 1 Calculer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{x^2-1}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x+1+\sqrt{1+x^2}\right)$

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3(x-1)^3}{1+3x^2}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité 1cm.

1. Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d que l'on déterminera tels que pour tout x réel
$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{1+3x^2}$$
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x)=\dfrac{9(x-1)^2(x+1)^2}{(1+3x^2)^2}$
En déduire le sens de variation de f.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que la droite Δ d'équation $y=x-3$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et Δ.
6. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
Tracer $\Delta, \mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$.
7. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ possède un centre de symétrie.

Exercice 3 (non spécialistes seulement) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1. Montrer que pour tout complexe z :

$$8z^4 + 8z^3 - z - 1 = (2z - 1)(z + 1)\left(4z^2 + 2z + 1\right)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $8z^4 + 8z^3 - z - 1 = 0$

3. On note z_0 la solution réelle négative de l'équation précédente, z_1 la solution réelle positive, z_2 la solution de partie imaginaire positive et z_3 la solution de partie imaginaire négative.
   Les points $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3$ sont les images respectives de $z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3$.

   (a) Ecrire z_2 et z_3 sous forme trigonométrique
   Placer $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3$ dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
   Montrer que $A_0A_2A_1A_3$ est un losange.

   (b) Montrer que $\left|\dfrac{z_2}{z_3}\right| = 1$ et calculer $\arg\left(\dfrac{z_2}{z_3}\right)$.
   Donner une interprétation géométrique de ces résultats.

   (c) Déterminer les images de A_1 et A_2 par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$
   Que peut-on en déduire pour le triangle $A_1A_2A_3$.

Exercice 4 (spécialistes seulement) Soit b un entier tel que $0 < b \leq 11$.
q et r sont respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de 132 par b.

1. Ecrire les relations traduisant les hypothèses.

2. Démontrer que $b \leq q$.

3. Démontrer que dans la division euclidienne de 132 par q, le quotient est b et que le reste est r.

4. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que si l'hypothèse $0 < b \leq 11$ n'est pas vérifiée, alors le résultat de la question n'est pas toujours vrai.