

## Devoir surveillé n° 3

**Exercice 1 (Bac 1999 spécialistes seulement)** Les trois parties  $A$ ,  $B$ ,  $C$  peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

### Partie A

Soit  $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ .

Déterminer les paires  $\{a; b\}$  d'entiers distincts de  $E$  tels que le reste de la division euclidienne de  $ab$  par 11 soit 1.

### Partie B

1. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.
  - (a) L'entier  $(n - 1)! + 1$  est-il pair ?
  - (b) L'entier  $(n - 1)! + 1$  est-il divisible par un entier naturel pair ?
2. Prouver que l'entier  $(15 - 1)! + 1$  n'est pas divisible par 15.
3. L'entier  $(11 - 1)! + 1$  est-il divisible par 11 ?

### Partie C

Soit  $p$  entier naturel non premier.

1. Prouver que  $p$  admet un diviseur  $q$  ( $1 < q < p$ ) qui divise  $(p - 1)!$
2. L'entier  $q$  divise-t-il l'entier :  $(p - 1)! + 1$  ?
3. L'entier  $p$  divise-t-il l'entier :  $(p - 1)! + 1$  ?

**Exercice 2 (Bac 2000 Partie A)** Dans tout l'exercice, le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

On considère la fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$u(x) = \sqrt{1 + x^2} - x$$

et on désigne par  $(C)$  sa courbe représentative.

1. Déterminer la limite de  $u$  en  $-\infty$ .
2. Montrer que pour tout  $x$  réel, on a

$$u(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}$$

En déduire la limite de  $u$  en  $+\infty$ .

3.
  - (a) Montrer que  $(u(x) + 2x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .
  - (b) Montrer que pour tout  $x$  réel, on a  $u(x) > 0$ .  
En déduire le signe de  $(u(x) + 2x)$ .
  - (c) Interpréter graphiquement ces résultats.

**Exercice 3 (Bac 2000 non spécialistes seulement)** Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique : 4 cm, on considère les points  $A$  d'affixe  $z_A = 1$  et  $B$  d'affixe  $z_B = 2$ .

Soit un réel  $\theta$  appartenant à l'intervalle  $]0; \pi[$ .

On note  $M$  le point d'affixe  $z = 1 + e^{2i\theta}$ .

1. Montrer que le point  $M$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A$  et de rayon 1.
2. Exprimer l'angle  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$  en fonction de  $\theta$ .  
En déduire l'ensemble  $E$  des points  $M$  quand  $\theta$  décrit l'intervalle  $]0; \pi[$ .
3. On appelle  $M'$  l'image de  $M$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $-2\theta$  et on note  $z'$  l'affixe de  $M'$ . Montrer que  $z' = \bar{z}$  puis que  $M'$  appartient à  $\mathcal{C}$ .
4. Dans toute la suite on choisit  $\theta = \frac{\pi}{3}$

On appelle  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{2\pi}{3}$  et  $A'$  l'image de  $A$  par  $r$ .

- (a) Définir l'image  $\mathcal{C}'$  du cercle  $\mathcal{C}$  par  $r$ .  
Placer sur une figure  $A, B, C, M, C'$  puis le point  $M'$  image de  $M$  par  $r$ .
- (b) Montrer que le triangle  $AMO$  est équilatéral.
- (c) Montrer que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  se coupent en  $O$  et en  $M'$ .
- (d) Soit le point  $P$  symétrique de  $M$  par rapport à  $A$ .  
Montrer que  $M'$  est le milieu de  $[A'P]$ .