

# Devoir surveillé 4

## Exercice 1 (Bac 1999 spécialistes seulement)

- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence)  
En déduire que  $2^{3n+1} - 2$  est un multiple de 7 et que  $2^{3n+2} - 4$  est un multiple de 7.
- Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
- $p$  étant un entier naturel, on considère le nombre entier  $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$ 
  - Si  $p = 3n$ , quel est le reste de la division de  $A_p$  par 7 ?
  - Démontrer que si  $p = 3n + 1$ , alors  $A_p$  est divisible par 7.
  - Etudier le cas où  $p = 3n + 2$ .
- On considère les nombres entiers  $a$  et  $b$  dans le système binaire

$$a = \overline{1001001000} \text{ et } b = \overline{1000100010000}$$

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme  $A_p$ .  
Sont-ils divisibles par 7 ?

**Exercice 2 (Bac 2000 non spécialistes seulement)** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (unité : 2cm). On dit qu'un triangle équilatéral est direct si et seulement si  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .

- On pose  $j = e^{2i\pi/3}$ 
  - Vérifier que  $1, j$  et  $j^2$  sont solutions de l'équation  $z^3 = 1$ .
  - Calculer  $(1 - j)(1 + j + j^2)$  et en déduire que  $1 + j + j^2 = 0$ .
  - Vérifier que  $e^{i\pi/3} + j^2 = 0$
- Dans le plan complexe, on considère trois points  $A, B, C$  deux à deux distincts, d'affixes respectives  $a, b, c$ .
  - Démontrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral direct si et seulement si  $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$
  - En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral direct si et seulement si  $a + bj + cj^2 = 0$
- A tout nombre complexe  $z \neq 1$ , on associe les points  $R, M$  et  $M'$  d'affixes respectives  $1, z$  et  $\bar{z}$ .
  - Pour quelles valeurs de  $z$  les points  $M$  et  $M'$  sont-ils distincts ?

- (b) En supposant que la condition précédente est réalisée, montrer que l'ensemble  $(\Delta)$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que le triangle  $RM M'$  soit équilatéral direct est une droite privée d'un point.

**Exercice 3 (Bac 1986)** On considère les intégrales

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ et } J = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}$$

1. Quelle est la dérivée de la fonction tangente ?  
Calculer  $I$ .

2. Soit la fonction  $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$   

$$x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

- (a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  et que pour tout  $x$  appartenant à cet intervalle

$$f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$$

- (b) Dédire du calcul précédent une relation entre  $I$  et  $J$ , puis calculer  $J$ .

**Exercice 4 (Bac1990)** Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $f(x) = \sin(\pi x)$ .

1.

- (a) Tracer la courbe représentative  $C$  de  $f$  (unité graphique : 8cm)

(b) Calculer  $I = \int_0^1 \sin(\pi x) dx$

- (c) Interpréter graphiquement cette intégrale.

2. Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on pose

$$S_n = \frac{1}{n} \left[ f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$$

- (a) Interpréter graphiquement  $S_n$  en introduisant les rectangles  $R_k$  de base  $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$  et de hauteur  $f\left(\frac{k}{n}\right)$  où  $0 \leq k \leq n-1$ . Faire la figure lorsque  $n = 8$ .

- (b) Prouver que

$$1 + e^{\frac{i\pi}{n}} + e^{\frac{2i\pi}{n}} + \dots + e^{\frac{(n-1)i\pi}{n}} = \frac{2}{1 - e^{\frac{i\pi}{n}}}$$

- (c) En déduire que

$$\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$

- (d) Prouver finalement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2}{\pi}$$

- (e) Comparer les résultats des questions 1. et 2. et interpréter graphiquement.