

## Devoir surveillé 5

**Exercice 1 (non spécialistes seulement BAC 2001)** Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On appelle  $f$  l'application qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  ( $z \neq -1$ ) associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que

$$z' = \frac{-iz - 2}{z + 1}$$

Soient  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $a = -1, b = 2i$  et  $c = -i$

1. Soit  $C'$  l'image du point  $C$  par  $f$ . Donner l'affixe  $c'$  du point  $C'$  sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
2. Calculer l'affixe  $d$  du point  $D$  ayant pour image par  $f$  le point  $D'$  d'affixe  $d' = \frac{1}{2}$
3. Pour tout nombre complexe  $z$  différent de  $-1$ , on note  $\rho$  le module de  $z + 1$  (c'est à dire  $|z + 1| = \rho$ ) et  $\rho'$  le module de  $z' + i$  (c'est à dire  $|z' + i| = \rho'$ ).
  - (a) Démontrer que, pour tout nombre complexe  $z$  différent de  $-1$ , on a  $\rho\rho' = \sqrt{5}$ .
  - (b) Si le point  $M$  appartient au cercle  $(\Gamma)$  de centre  $A$  et de rayon  $2$ , montrer qu'alors  $M' = f(M)$  appartient à un cercle  $(\Gamma')$  dont on précisera le centre et le rayon.
4. Pour tout nombre complexe  $z$  différent de  $-1$ , on considère le nombre complexe  $\omega = \frac{z - 2i}{z + 1}$ 
  - (a) Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe  $\omega$ .
  - (b) Montrer que  $z' = -i\omega$ .
  - (c) Déterminer l'ensemble  $(F)$  des points  $M$  d'affixe  $z$  telle que  $z'$  soit un réel non nul.
  - (d) Vérifier que point  $D$  appartient aux ensembles  $(\Gamma)$  et  $(F)$ .
5. Représenter les ensembles  $(\Gamma)$ ,  $(F)$  et  $(\Gamma')$  en prenant 4 cm pour unité graphique.

**Exercice 2 (spécialistes seulement BAC 2000)** Dans le plan orienté, on considère un triangle direct  $OAB$  rectangle et isocèle en  $O$ . On a donc  $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

On note  $R_A$  et  $R_B$  les rotations de centres respectifs  $A$  et  $B$  et de même angle  $\frac{\pi}{2}$ , et  $S_O$  la symétrie de centre  $O$ .

On place un point  $C$ , non situé sur la droite  $(AB)$ , on trace les carrés  $BEDC$  et  $ACFG$  directs. On a donc  $(\vec{BE}, \vec{BC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et  $(\vec{AC}, \vec{AG}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

1.
  - (a) Déterminer  $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$  composée de réflexions d'axes  $(AB)$  et  $(AO)$ .
  - (b) En écrivant  $R_B$  sous la forme d'une composée de deux réflexions, démontrer que  $R_A \circ R_B = S_O$ .
2.
  - (a) Déterminer l'image de  $E$  par  $R_A \circ R_B$ .
  - (b) En déduire que  $O$  est le milieu du segment  $[EG]$ .

- (c) On note  $R_F$  et  $R_D$  les rotations de centres respectifs  $F$  et  $D$  et de même angle  $\frac{\pi}{2}$ .  
 Etudier l'image de  $C$  par la transformation  $R_F \circ S_O \circ R_D$ .  
 Déterminer la transformation  $R_F \circ S_O \circ R_D$ .
- (d) Placer  $H$  le symétrique de  $D$  par rapport à  $O$ .  
 Démontrer que  $R_F(H) = D$ .  
 Démontrer que le triangle  $FOD$  est rectangle et isocèle en  $O$ .

**Exercice 3 (BAC 2001)** Dans tout l'exercice,  $C$  désigne la courbe d'équation  $y = \ln x$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'origine  $O$  et d'unité graphique 4 cm.

**Question préliminaire :** tracer avec soin mais sans étude de la fonction, la courbe  $C$  et la droite  $D$  d'équation  $y = x$ .

### Partie A

- Déterminer une équation de la tangente  $\Delta$  à  $C$  au point  $I$  d'abscisse 1.
  - Etudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x - 1 - \ln x$
  - En déduire la position de  $C$  par rapport à  $\Delta$ .
- Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par  $x - \ln x$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - $M$  et  $N$  sont les points de même abscisse  $x$  des courbes  $C$  et  $D$  respectivement.  
 Déterminer la plus petite valeur (exprimée en cm) prise par la distance  $MN$  lorsque  $x$  décrit  $]0; +\infty[$ .

### Partie B

- Soit  $M$  le point d'abscisse  $x$  de la courbe  $C$ . Exprimer la distance  $OM$  de l'origine à  $M$  en fonction de  $x$ .
- Etude de la fonction auxiliaire  $u$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $u(x) = x^2 + \ln x$ .
  - Justifier les limites de  $u(x)$  en 0 et en  $+\infty$  ainsi que le sens de variation de  $u$ .
  - Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$  et un seul tel que  $u(\alpha) = 0$ .  
 Justifier que  $\alpha$  est compris entre 0,5 et 1 puis donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
  - Déterminer le signe de  $u(x)$  suivant la valeur de  $x$ .
- Etude de la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$ .  
 Calculer  $g'(x)$  et vérifier que  $g'(x) = \frac{2}{x}u(x)$   
 En déduire le tableau de variation de  $g$ .
- Déduire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe  $C$  et en donner une valeur approchée (exprimée en cm) en utilisant pour  $\alpha$  la valeur centrale de l'encadrement trouvé à la question **2b**.
- $A$  étant le point d'abscisse  $\alpha$  de  $C$ , démontrer que la tangente en  $A$  est perpendiculaire à la droite  $(OA)$ .