Devoir surveillé 6

Exercice 1 (spécialistes seulement) Soit le repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe. Les points A, B et C sont définis par leurs affixes respectives : $z_A = 3 - i\sqrt{3}$; $z_B = 3 + i\sqrt{3}$; $z_C = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

1. Faire la figure en choisissant pour unité graphique 2 cm. On placera l'origine sur le côté gauche de la feuille.

2. Prouver que OAB est un triangle équilatéral direct. Soit G le centre de gravité du triangle OAB. Déterminer l'affixe z_G de G.
   Dans la suite de l'exercice, on étudie deux isométries transformant $[OA]$ en $[GC]$.

3. Soit a et b deux nombres complexes et R l'application qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = az + b$.

   (a) Déterminer a et b pour que $R(O) = G$ et $R(A) = C$.
   (b) Prouver que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
   (c) Prouver que les droites (OA) et (GC) sont perpendiculaires.
   Que peut-on dire des points G, B et C ?
   (d) Construire, en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par R.

4. Soit a' et b' deux nombre complexes et f l'application qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a'\bar{z} + b'$.

   (a) Déterminer a' et b' pour que $f(O) = G$ et $f(A) = C$.
   (b) Soit I le milieu du segment $[OG]$. Déterminer le point $f(I)$.
   f est-elle une réflexion ?
   (c) Construire, en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par f.

Exercice 2 (non spécialistes seulement) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soient les nombres complexes $a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$ et $z_0 = 6 + 6i$ d'image A_0.

1. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par $z_n = a^n z_0$

   (a) Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique.
   Ecrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \dfrac{1}{2}e^{i\pi/6}$
   (b) Exprimer z_3 puis z_7 en fonction de z_1 et a^2. En déduire l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle.
   (c) Placer les points A_0, A_1, A_3 et A_7 images respectives des complexes z_0, z_1, z_3 et z_7.

2. Pour tout entier naturel n on pose $|z_n| = r_n$.

Gustave Eiffel

(a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $r_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

(b) En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

(c) Déterminer la limite de la suite (r_n) et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

(d) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $OA_p \leq 10^{-3}$ et donner alors une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_p}\right)$.

Exercice 3 On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Soit μ un réel. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \mu$ équivaut à $e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$. En déduire que l'équation $f(x) = \mu$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa valeur en fonction de μ.

2.

   (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   (b) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3.

   (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

   (b) En étudiant le sens de variation de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x) - x$, préciser la position de (C) *par* rapport à (T).

   (c) Tracer (C) et (T) (Unité graphique : 2cm)

4. Soit $\mathcal{D}$ la partie représentant sur le graphique l'ensemble des points M de coorodonnées $(x; y)$ tels que

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

   Calculer, en cm^2, l'aire de $\mathcal{D}$.

Gustave Eiffel