

Devoir surveillé 7

Exercice 1 (non spécialistes seulement) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$\frac{z-2}{z-1} = z \quad (1)$$

On donnera le module et un argument de chaque solution.

2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$\frac{z-2}{z-1} = i \quad (2)$$

On donnera la solution sous forme algébrique.

3. Soit M, A et B les points d'affixes respectives : $z, 1$ et 2 .

On suppose que M est distinct des points A et B .

(a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$.

(b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).

4. (a) Montrer, à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans \mathbb{C} :

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$$

où n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

(b) Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation :

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i \quad (3)$$

On cherchera les solutions sous forme algébrique.

Exercice 2 (spécialistes seulement) On se place dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$

1. On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \bar{z}$$

- (a) Exprimer $f \circ f(z)$ en fonction de z .
 (b) Montrer que $f = R \circ S$ où R est une rotation et S une symétrie axiale (on déterminera les caractéristiques de ces deux applications R et S).
 (c) Décomposer R à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que f est une réflexion dont on donnera l'axe D_1 .
2. On considère l'application g qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M'' d'affixe z'' telle que

$$z'' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \bar{z} - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- (a) Déterminer une équation de l'ensemble des points invariants de g .
 (b) Montrer que $g = T \circ f$ où T est une translation (on précisera l'affixe du vecteur de la translation T).
 (c) Décomposer la translation T à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que g est une réflexion d'axe noté D_2 .
 (d) Quelle est l'image par g du point A d'affixe $\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$?
 En déduire une construction de la droite D_2 qui n'utilise pas son équation.

Exercice 3 On considère les intégrales $I = \int_0^\pi \cos^4 x \, dx$ et $J = \int_0^\pi \sin^4 x \, dx$

1. (a) Montrer que l'intégrale I peut s'écrire

$$I = \int_0^\pi \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) \, dx$$

- (b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I = \int_0^\pi \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3} J$$

- (c) Montrer de même que $J = \int_0^\pi \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3} I$

2. (a) Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$
 (b) Montrer que $J - I = 0$
 (c) En déduire les intégrales I et J .