



## Devoir surveillé 9

**Exercice 1** L'espace est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Il n'est pas demandé de faire de figure.

Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2.

On considère les quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $I$  de coordonnées respectives :

$A(-1; 2; 1)$  ;  $B(1; -6; -1)$  ;  $C(2; 2; 2)$  ;  $I(0; 1; -1)$

- Montrer que le vecteur  $\vec{n}(1; 1; -3)$  est normal au plan contenant les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
  - Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- Soit  $Q$  le plan d'équation  $x + y - 3z + 2 = 0$  et  $Q'$  le plan de repère  $(O; \vec{i}, \vec{k})$ .
  - Pourquoi  $Q$  et  $Q'$  sont-ils sécants ?
  - Donner un point  $E$  et un vecteur directeur  $\vec{u}$  de la droite d'intersection  $\Delta$  des plans  $Q$  et  $Q'$ .
- Écrire une équation cartésienne de la sphère  $S$  de centre  $I$  et de rayon 2.
- On considère les points  $J$  et  $K$  de coordonnées respectives :  $J(-2; 0; 0)$  ;  $K(1; 0; 1)$   
Déterminer avec soin l'intersection de la sphère  $S$  et de la droite  $(JK)$ .

**Exercice 2 (non spécialistes)** On considère le polynôme  $P$  défini par  $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

- Calculer  $P(i\sqrt{3})$  et  $P(-i\sqrt{3})$ , puis démontrer qu'il existe un polynôme  $Q$  du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$  on ait  $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .
- Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  d'affixes respectives  $z_A = i\sqrt{3}$  ;  $z_B = -i\sqrt{3}$  ;  $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$  ;  $z_D = \overline{z_C}$  puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.
- On note  $E$  le symétrique de  $D$  par rapport à  $O$ .  
Montrer que  $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$  puis déterminer la nature du triangle  $BEC$ .

**Exercice 3 (spécialistes)**

- Déterminer  $PGCD(2\ 688; 3\ 024)$ .
- Dans cette question,  $x$  et  $y$  sont deux entiers relatifs.
  - Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes :

$$2688x + 3024y = -3360 \quad (1)$$

$$8x + 9y = -10 \quad (2)$$

- Vérifier que  $(1; -2)$  est une solution particulière de l'équation (2).
- Déduire de ce qui précède les solutions de (2).

3. Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormal de l'espace.  
On considère les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  d'équations respectives

$$x + 2y - z = -2 \quad \text{et} \quad 3x - y + 5z = 0.$$

- Montrer que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  se coupent suivant une droite  $\mathcal{D}$ .
- Montrer que les coordonnées des points de  $\mathcal{D}$  vérifient l'équation (2).
- En déduire l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points de  $\mathcal{D}$  dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

**Exercice 4** Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique ( unité graphique : 2 cm ).

#### A. Etude d'une fonction

On définit la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1)$

- Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
- Etudier le sens de variation de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
- Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et  $A$  le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse 3. Calculer l'ordonnée de  $A$ . Soit  $B$  le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $\frac{5}{4}$ ,  $P$  le projeté orthogonal de  $B$  sur l'axe  $(O; \vec{u})$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $B$  sur l'axe  $(O; \vec{v})$ .  
Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points  $B$ ,  $P$  et  $H$ . Placer les points  $A$ ,  $B$ ,  $P$  et  $H$  dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et représenter la courbe  $\mathcal{C}$ .

#### B. Utilisation d'une rotation

Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . A tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$ , la rotation  $r$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$ .

- Donner  $z'$  en fonction de  $z$ . On note  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  ( $x, y, x', y'$  réels), exprimer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ , puis exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $x'$  et  $y'$ .
  - Déterminer les coordonnées des points  $A'$ ,  $B'$  et  $P'$  images respectives des points  $A$ ,  $B$  et  $P$  par la rotation  $r$ .
- On appelle  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$  et  $\Gamma$  sa courbe représentative dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
  - Montrer que lorsqu'un point  $M$  appartient à  $\mathcal{C}$ , son image  $M'$  par  $r$  appartient à  $\Gamma$ . On admet que lorsque le point  $M$  décrit  $\mathcal{C}$ , le point  $M'$  décrit  $\Gamma$ .
  - Tracer sur le graphique précédent les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $P'$  et la courbe  $\Gamma$  ( l'étude des variations de  $g$  n'est pas demandée ).

#### C. Calculs d'intégrales

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

- Calculer l'intégrale  $\int_0^{\ln 2} g(x) dx$   
Interpréter géométriquement cette intégrale.
- Déterminer, en unités d'aire, l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine plan  $\mathcal{D}$  limité par les segments  $[AO]$ ,  $[OH]$  et  $[HB]$  et l'arc de courbe  $\mathcal{C}$  d'extrémités  $B$  et  $A$ .
  - On pose  $I = \int_{\frac{5}{4}}^3 \ln(\sqrt{1+x} - 1) dx$   
Trouver une relation entre  $\mathcal{A}$  et  $I$  puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale  $I$ .