Suites

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

1. (a) Calculer la valeur moyenne de f sur $[0\ ;\ 10]$.
   (b) Déterminer, en fonction de n, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n\ ;\ n+1]$.
2. Soit (u_n), la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)\mathrm{e}^{-2n}$ pour tout n entier positif ou nul.
   (a) Calculer la valeur exacte de $u_0,\ u_1$ et u_2.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) Déterminer la valeur exacte de la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

1. Déterminer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la suite numérique (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = f(n) = \mathrm{e}^{-n}$.
   (a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   (b) Etudier le sens de variations de la suite (u_n).
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   (d) A partir de quelle valeur de n a-t-on $u_n < 10^{-8}$?
   (e) Exprimer, en fonction de n, la somme $S_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + n$.
   (f) En déduire, en fonction de n, l'expression du produit $P_n = u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \ldots u_n$.

Exercice 3 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = -1$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Déterminer u_n en fonction de n. En déduire u_{15}.
   (c) Calculer, en fonction de n : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = e^{u_n}$
   (a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q.
   (b) Déterminer v_n en fonction de n.
3. (a) En utilisant le résultat de la question **1.(c)**, calculer $P_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$
   (b) Déterminer la valeur de n pour laquelle $P_n = e^{-88}$.

Exercice 4 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 + u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer u_1, u_2, u_3
2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -1 + u_n$.
   Calculer v_0 et montrer que la suite (v_n) est géométrique.
3. Déterminer v_n en fonction de n et calculer la limite de (v_n).
4. Déterminer u_n en fonction de n et calculer la limite de (u_n).