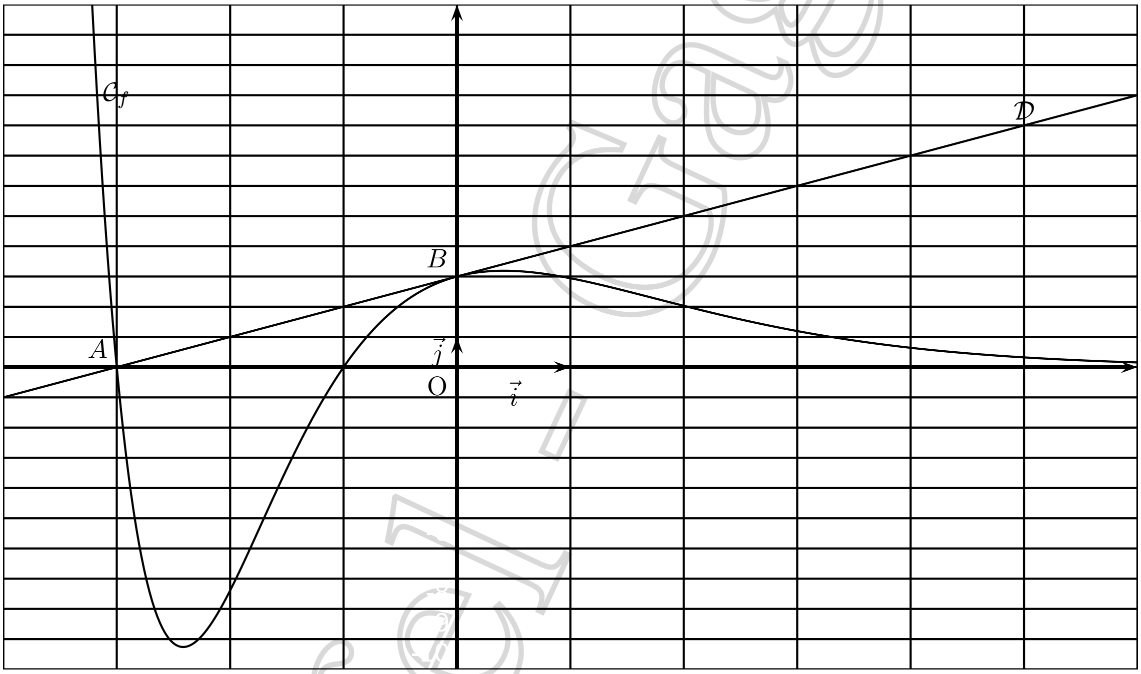
Problème
BAC électronique 2004
France métropolitaine

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{-x}$$

où a, b et c désignent trois nombres réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie.
Sur le graphique ci-après, on a représenté la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans le plan muni du repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.



On admet que la droite $\mathcal{D}$ passe par A et est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B.

1. (a) À l'aide d'une lecture graphique, déterminer les coordonnées entières des points A et B.
   En déduire $f(-3)$ et $f(0)$.

   (b) Montrer qu'une équation de la droite (AB) est : $y = x + 3$.
   En déduire la valeur de $f'(0)$.

2. (a) Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$:
   $f'(x) = \left[-ax^2 + (2a - b)x + b - c\right] e^{-x}$.

   (b) En déduire $f'(0)$, en fonction de b et c.

3. (a) En utilisant les questions précédentes, montrer que les réels $a,\ b$ et c sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 9a-3b+c & = & 0 \\ b-c & = & 1 \\ c & = & 3 \end{array}\right.$$

(b) Résoudre le système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie B

On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\left(x^2+4x+3\right)e^{-x}.$$

1. (a) Vérifier que pour x différent de zéro,

$$f(x)=\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)x^2e^{-x}$$

(b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
En déduire une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

(c) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. (a) Vérifier que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=(-x^2-2x+1)e^{-x}$$

(b) Pour tout x réel, étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

(c) Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de l'ordonnée de chacun des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique α pour x appartenant à l'intervalle $[-1;0]$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie C

1. Soit F La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x)=\left(-x^2-6x-9\right)e^{-x}$$

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x)=x+3-f(x).$$

3. On considère la partie du plan comprise entre la droite $\mathcal{D}$, la courbe $\mathcal{C}_f$, et les droites d'équations $x=-3$ et $x=0$.
On désigne par $\mathcal{A}$ la valeur, exprimée en cm^2, de l'aire de cette partie.
Calculer $\mathcal{A}$.