Fonction logarithme népérien

Exercice 1 On considère le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$$

1. Calculer $P(1)$. déterminer les nombres réels a, b, c tels que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ on ait :

$$P(x) = (x-1)\left(ax^2 + bx + c\right)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$
3. En déduire la résolution des équations suivantes :
   (a) $6\sin^3 x - 5\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$
   (b) $6\ln^3 x - 5\ln^2 x - 2\ln x + 1 = 0$

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = 3 + 2\ln x - \ln^2 x$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan (unité graphique : 1 cm).

1. (a) Calculer la limite de f en 0. En déduire une asymptote à $\mathcal{C}$.
   (b) Mettre en facteur $\ln^2 x$ dans $f(x)$ puis calculer la limite de f en $+\infty$.
2. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x}$$

3. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation $1 - \ln x > 0$
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4. Calculer $f\left(\frac{1}{e}\right)$ et $f\left(e^3\right)$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?
5. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\frac{1}{e}$
6. Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère donné. Placer le point A et construire la tangente trouvée à la question 5.
7. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = -x\left[\ln^2 x - 4\ln x + 1\right]$$

   Calculer $g'(x)$ et en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$

Eiffel - Gagny

Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiffel - Gagny -- Eiff