

Fonction logarithme

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = a \ln^2 x + b \ln x + c$ où a, b et c sont des réels fixés.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan d'unité graphique 2 cm.

- Déterminer c sachant que $f(1) = -\frac{1}{2}$
 - En utilisant la valeur de c trouvée au (a) déterminer a et b sachant que $f(e^2) = \frac{3}{2}$ et que le point de coordonnées $(e^3; \frac{11}{2})$ est un point de \mathcal{C} .
- On considère dans la suite le fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \ln^2 x - \ln x - \frac{1}{2}$
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
On pourra mettre $\ln x$ en facteur dans $f(x)$ pour calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - Déterminer $f'(x)$ et étudier les variations de f . Dresser le tableau de variations de f .
- Déterminer les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des abscisses.
On donnera les valeurs exactes puis, si nécessaire, les valeurs approchées à 10^{-2} .
 - Tracer \mathcal{C} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- Soit F la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $F(x) = x \ln^2 x - 3x \ln x + \frac{5}{2}x$
 - Montrer que F est une primitive de f sur \mathbb{R}_+^* .
 - Déterminer la primitive de f sur \mathbb{R}_+^* qui prend la valeur 3 pour $x = 1$.
 - Calculer $I = \int_5^7 f(x) dx$
 - Calculer, en cm^2 , l'aire de la surface délimitée par \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 5$ et $x = 7$