Devoir commun TGE

Exercice. Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 2 cm).

1. Placer dans ce plan les points A et B d'affixes respectives
$$z_A = 1 + \sqrt{2} + i \quad ; \quad z_B = 1 + \sqrt{2} - i$$
i étant le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$
2. Vérifier que $OA = OB$
3. Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$
4. Déterminer le module et un argument de $\frac{z_B}{z_A}$
En déduire que B est le transformé de A dans la rotation de centre O et d'angle θ dont on donnera une mesure en radian.

Problème.

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]1; +\infty[$. On donne ci-dessous son tableau de variations.

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\,+\infty$	$\searrow$	$2{,}5$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus on admet que, pour tout x élément de $]1; +\infty[$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $ax + \frac{b}{x-c}$ où a, b, c sont trois nombres réels (avec a et b non nuls) que l'on se propose de déterminer à partir des indications fournies par le tableau de variations de f.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. (a) Utiliser le tableau de variations pour justifier l'existence d'une droite $\mathcal{D}$ asymptote à $\mathcal{C}$. Donner une équation de $\mathcal{D}$.

   (b) En déduire une valeur de c.
   Pour les questions suivantes, on prendra $c = 1$. On a donc :
$$f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$$

2. Le tableau de variations nous fournit les coordonnées d'un point particulier de $\mathcal{C}$. En déduire une relation entre les nombres réels a et b.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f (on rappelle que a et b sont des constantes). Utiliser le tableau de variations pour trouver une deuxième relation entre a et b.
4. Déterminer les nombres réels a et b à partir des deux questions précédentes.

Partie B

On admet pour la partie B que la fonction f de la partie A est définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$$

1. Montrer que la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
2. (a) Résoudre, par le calcul, sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 3$.
   (b) Résoudre sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$, l'inéquation $f(x) > 3$ (on précisera la méthode utilisée).
3. Quelle est la dérivée de la fonction f ?
   Écrire une équation de de la droite $\mathcal{T}_1$ tangente à $\mathcal{C}$ au point M d'abscisse 2, et une équation de la droite $\mathcal{T}_2$ tangente à $\mathcal{C}$ au point N d'abscisse 5.
4. Construire les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ et la courbe $\mathcal{C}$.
5. Calculer les coordonnées du point d'intersection P de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.
6. Calculer l'aire du triangle MNP. On donnera le résultat en cm^2.