Bac blanc STI Génie électronique Février 2005

Exercice 1 On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 - 6z + 12 = 0$$

1. Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.
   Soient z_1 et z_2 les solutions, z_1 étant celle dont la partie imaginaire est positive.
2. Écrire z_1 puis z_2 sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel positif, i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ et θ un nombre réel (r représente donc le module du nombre complexe et θ un argument). En déduire que $\frac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
3. Dans le plan $\mathcal{P}$, rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm, construire géométriquement les points A_1 et A_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 (on n'utilisera pas de valeurs approchées).
   Montrer l'existence d'une rotation de centre O qui transforme A_2 en A_1.
   Déterminer l'angle α de cette rotation.
4. On note A_0 l'image de A_1 par la rotation de centre O et d'angle α.
   Construire géométriquement A_0. Déterminer l'affixe du point A_0.
5. Quelle est la nature du quadrilatère $OA_0A_1A_2$? Justifier la réponse.

Exercice 2 *Les deux questions de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.*

1. La figure ci-dessous schématise l'écran d'un oscilloscope que l'on a connecté à un générateur de tension périodique dont les caractéristiques sont inconnues. On veut déterminer la fonction U qui donne la tension $U(t)$ à l'instant t (réel), sachant qu'elle est de la forme $U(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$, où a et ω sont des nombres réels strictement positifs et φ est un élément de $]-\pi; \pi[$.

On rappelle que la période T de U est égale à $\frac{2\pi}{\omega}$

$U(t)$ est exprimée en volts et t en millisecondes.

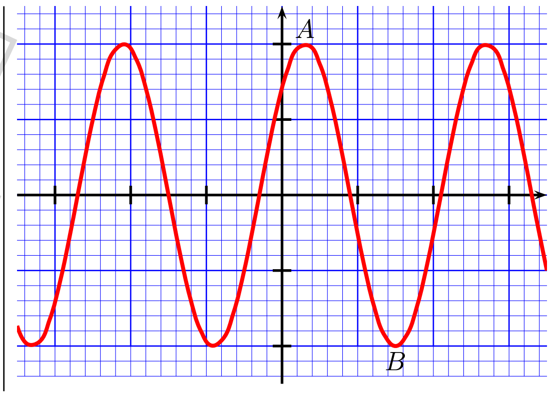
L'oscilloscope est réglé de la manière suivante :

* sensibilité horizontale : 1 ms par centimètre

* sensibilité verticale : 1 V par centimètre

Sur l'écran on mesure les coordonnées des points A et B (voir le graphique) :

$A(0,3\ ;\ 2)$ et $B(1,5\ ;\ -2)$



La fonction U est donc maximale pour $t = 0,3$ et minimale pour $t = 1,5$.
A l'aide des coordonnées des points A et B, déterminer le coefficient a, la période T et la valeur de φ. Donner l'expression de $U(t)$ avec les valeurs ainsi trouvées.

2. On considère maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = 2\sin\left(\frac{5\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)$

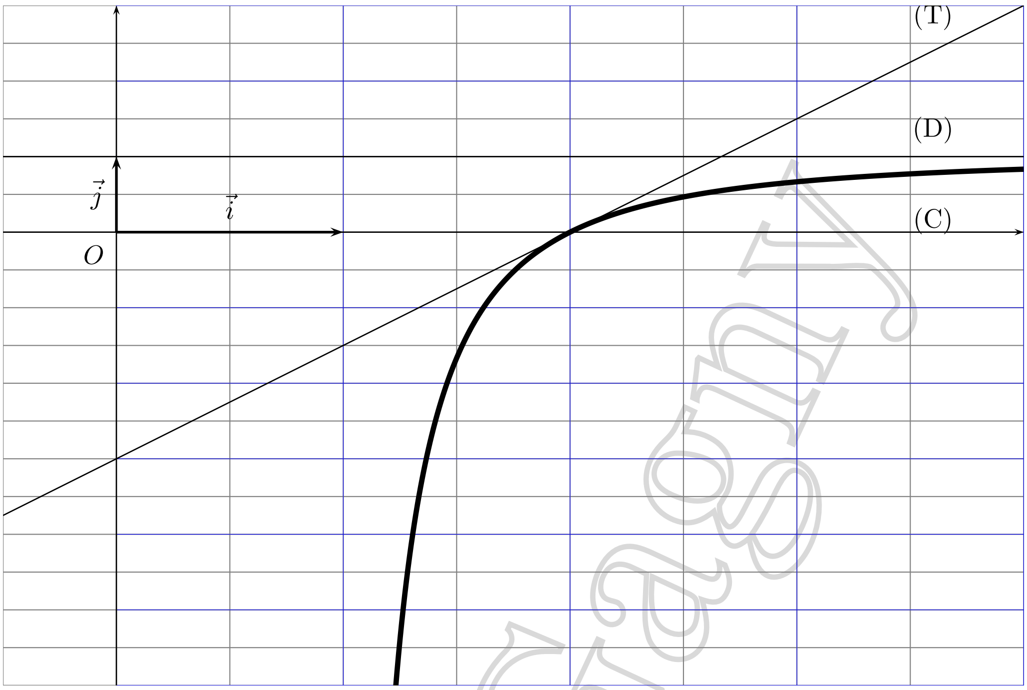
   (a) Calculer la valeur moyenne U_m de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1,2]$.

   (b) Calculer la valeur moyenne J de la fonction f^2, carré de la fonction f, sur l'intervalle $[0\ ;\ 1,2]$.
   Calculer la tension efficace $U_{eff} = \sqrt{J}$

Problème

Partie A

On donne, dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la représentation graphique $(\mathcal{C})$ d'une fonction g définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$ ainsi que deux droites (T) et (D). La droite (T) passe par les points de coordonnées respectives $(2;0)$ et $(0;-3)$. La droite (D) a pour équation $y=1$.



1. (a) Déterminer graphiquement $g(2)$.
   (b) Sachant que la droite (T) est tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2, déterminer graphiquement $g'(2)$.
   (c) On admet que la droite (D) est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$. Déterminer graphiquement la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
   (d) Sachant que la courbe $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en un seul point, étudier graphiquement le signe de la fonction g sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
2. On définit les fonctions $g_1,\ g_2$ et g_3 sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$g_1(x)=1-\frac{1}{x-1}\quad;\quad g_2(x)=1-\frac{2}{x^2-x}\quad;\quad g_3(x)=\ln(x-1).$$

   L'une d'elles est la fonction g que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

   (a) Calculer $g_1(2),\ g_2(2)$ et $g_3(2)$.
   Ces résultats permettent-ils d'éliminer une des trois fonctions ?
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_3(x)$.
   Quelle fonction peut-on alors éliminer ?
   (c) On note g_1' et g_2' les fonctions dérivées respectives de g_1 et g_2.
   Calculer $g_1'(2)$ et $g_2'(2)$ puis conclure.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par

$$f(x) = x + 1 + 2\ln x - 2\ln(x-1)$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. (a) Quelle propriété de la fonction logarithme népérien permet de prouver que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$,

$$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \ ?$$

   (b) Déterminer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

2. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   (b) Justifier que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

   (c) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]1;+\infty[$: $\dfrac{x}{x-1} > 1$.

   Quel est alors le signe de $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ pour x appartenant à $]1;+\infty[$?

   (d) En déduire la position de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite (D).

3. (a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]1;+\infty[$: $f'(x) = g(x)$ où g est la fonction trouvée dans la **partie A**.

   (b) A l'aide des résultats graphiques obtenus dans la **partie A**, dresser le tableau de variations de la fonction f.

Partie C

1. Montrer que, sur l'intervalle $]1;+\infty[$, la fonction H définie par

$$H(x) = x\ln x - (x-1)\ln(x-1)$$

   est une primitive de la fonction h définie par $h(x) = \ln x - \ln(x-1)$ sur cet intervalle.

2. (a) Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe $(\mathcal{C}_f)$. Sur cette figure, représenter la droite (D) et hachurer la partie du plan comprise entre la droite (D), la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

   (b) On désigne par $\mathcal{A}$ la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan hachurée précédemment. Donner la valeur exacte de $\mathcal{A}$ puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès.

Annexe : représentation de la courbe ($\mathcal{C}_f$)
à rendre avec la copie