Equations différentielles

1 Introduction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin 2x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 2\cos 2x$.
f' est elle même dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) = -4\sin 2x$.
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R} : 4f(x) + f''(x) = 0$.
On dit que l'équation $4f(x) + f''(x) = 0$ est une équation différentielle du second ordre (car faisant intervenir une dérivée seconde), et que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin 2x$ est une solution de cette équation (on dit aussi fonction intégrale).
Généralement, on écrit plutôt $4y(x) + y''(x) = 0$ et même plus simplement : $4y + y'' = 0$

Remarque 1 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x$ est solution de la même équation.

Remarque 2 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos 2x + 4\sin 2x$ est aussi solution de la même équation.

Remarque 3 Résoudre (on dit aussi intégrer) une équation différentielle sur un intervalle I c'est trouver toutes les solutions, sur I de cette équation, c'est à dire toutes les fonctions f qui vérifient l'équation pour tout $x \in I$.

Remarque 4 La courbe représentative d'une fonction f solution est appelée courbe intégrale.

Remarque 5 Si une équation différentielle ne fait intervenir que x, y, y' (avec y fonction de x et y' sa dérivée) on dit que l'équation différentielle est du premier ordre.

Remarque 6 Si une équation différentielle ne fait intervenir que x, y, y', y'' (avec y fonction de x, y' sa dérivée et y'' sa dérivée seconde) on dit que l'équation différentielle est du second ordre.

Remarque 7 Les notations ne sont pas figées. La fonction paut être une fonction de la variable t et se noter x. Par exemple : $x(t) = \sin 2t$ ou $f(t) = \sin 2t$.

2 Equations différentielles du premier ordre

2.1 Equation $y' = f(x)$

Résoudre ce type d'équation différentielle équivaut à chercher les primitives de f :
Exemple : Résoudre sur $]0;+\infty[$: $y' = \cos x + \dfrac{1}{x}$
Cette équation admet comme solutions toutes les fonctions primitives de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \cos x + \dfrac{1}{x}$
Donc les fonctions solutions de cette équation différentielle sont les fonctions F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = \sin x + \ln x + C$ où C désigne une constante réelle quelconque.
Remarque : La résolution sur $]-\infty;0[$ aurait donné $F(x) = \sin x + \ln(-x) + C$

2.2 Equation $y' = ay$

Théorème 1 L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$, est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{ax}$ où C désigne une constante réelle quelconque.

Démonstration.
$y' = ay \Leftrightarrow y' - ay = 0 \Leftrightarrow (y' - ay)\,e^{-ax} = 0 \Leftrightarrow y'e^{-ax} - aye^{-ax} = 0 \Leftrightarrow \left(ye^{-ax}\right)' = 0 \Leftrightarrow ye^{-ax} = C$

Théorème 2 L'équation différentielle $y' = ay$ admet sur $\mathbb{R}$ une et une seule solution vérifiant la condition $y_0 = f(x_0)$ où x_0 et y_0 sont deux réels donnés

Exemple 1 $y' + 3y = 0$

Exemple 2 $y' = 2y$

Exemple 3 Intégrer l'équation différentielle $y' = -5y$ et déterminer la fonction intégrale qui prend la valeur 2 en 1.

3 Equations différentielles du second ordre

3.1 Equation $y'' = f(x)$

Deux intégrations successives conduisent au résultat.

Exemple 4 $y'' = 6x + 2$
Une première intégration conduit à : $y' = 3x^2 + 2x + A$ où A désigne une constante réelle quelconque.
Une deuxième intégration conduit à : $y = x^3 + x^2 + Ax + B$ où A et B désignent deux constantes réelles quelconques.

3.2 Equation différentielle de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$

Théorème 3 L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ où ω est un réel non nul, est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto A\cos\omega x + B\sin\omega x$ où A et B désignent deux constantes réelles quelconques.

Théorème 4 L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une et une solution vérifiant deux conditions initiales $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = \alpha$ où x_0, y_0 et α sont des réels donnés.

Exemple 5 Résoudre l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$

Les solutions de cette équations sont les fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\cos 3x + B\sin 3x$
Remarque : on peut prendre aussi bien $\omega = 3$ que $\omega = -3$
Si on impose de plus les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ alors :
$f(0) = 1 \Rightarrow A = 1$
$f(x) = A\cos 3x + B\sin 3x \Rightarrow f'(x) = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$
$f'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
La solution cherché est donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 3x$