

# BACCALAURÉAT, SÉRIES STI ET STL FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

## I. PROBABILITÉS

Si  $A$  et  $B$  sont incompatibles :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  ;  $P(\Omega) = 1$  ;  $P(\emptyset) = 0$

Dans le cas équiprobable :  $P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition :  $F(x) = P(X \leq x)$

Espérance mathématique :  $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

Variance :  $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$

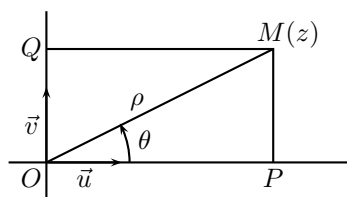
Ecart-type :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

## II. ALGÈBRE

### A. NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique :  $z = x + iy$

Forme trigonométrique :  $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$ ,  $\rho > 0$



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

$$\overrightarrow{OP} = x = \Re(z) = \rho \cos \theta$$

$$\overrightarrow{OQ} = y = \Im(z) = \rho \sin \theta$$

$$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Opérations algébriques

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Conjugué

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta} ; \bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) ; y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' ; \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$$

$$|zz'| = |z||z'|$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$$

Inégalité triangulaire

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

### B. IDENTITÉS REMARQUABLES

(valables sur  $\mathbb{C}$  et donc sur  $\mathbb{R}$ )

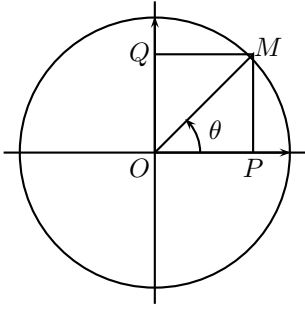
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) ; a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$$

## B. TRIGONOMETRIE



$$\overline{OP} = \cos \theta$$

$$\overline{OQ} = \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

### Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

### Formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad ; \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

### Formules d'addition

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) \quad ; \quad \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

### Formules de Moivre

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\text{soit encore } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

## D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient  $a, b, c$  des nombres réels,  $a \neq 0$ , et  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

L'équation  $az^2 + bz + c = 0$  admet :

- Si  $\Delta > 0$ , deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si  $\Delta = 0$ , une solution réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- Si  $\Delta < 0$ , deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas :  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ .

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

## E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

### Suites arithmétiques

Premier terme  $u_0$  ;  $u_{n+1} = u_n + a$  ;  $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

### Suites géométriques

Premier terme  $u_0$  ;  $u_{n+1} = bu_n$  ;  $u_n = u_0 b^n$

$$\text{Si } b \neq 0, \quad S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$$

$$\text{Si } b = 1, \quad S_n = n + 1$$

### III. ANALYSE

#### A. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

##### 1. Fonctions logarithme et exponentielle

$$\ln 1 = 0$$

$$\text{Si } x \in ]-\infty; +\infty[ \text{ et } y \in ]0; +\infty[, \\ y = \exp(x) = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y$$

$$a^x e^{x \ln a} \quad (a > 0)$$

$$\ln e = 1$$

$$e^0 = 1$$

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

$$\ln a^x = x \ln a$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

##### 2. Fonctions puissances

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$$

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}^*, x \in [0; +\infty[ \text{ et } y \in [0; +\infty[, \\ y = \sqrt[n]{x} \text{ équivaut à } x = y^n$$

#### B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES

##### 1. Fonctions

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty ; \text{ si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0 ; \text{ si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$$

Comportement à l'origine de  $\ln(1+x)$ ,  $e^x$ ,  $\sin x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h} = 1$$

##### 2. Suites (Séries STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

$$\text{Si } k > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = +\infty ; \text{ si } 0 < k < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. **Dérivées et primitives des fonctions usuelles**

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
$k$	$0$	$] -\infty, +\infty[$
$x$	$1$	$] -\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$nx^{n-1}$	$] -\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$] 0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$] 0, +\infty[$
$e^x$	$e^x$	$] -\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$] -\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$] -\infty, +\infty[$

2. **Opérations sur les dérivées**

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$

$$\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

Positivité

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } f \geq 0, \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \geq 0$$

Intégration d'une inégalité

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } f \leq g, \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

Si  $a \leq b$  et  $m \leq f \leq M$ , alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

$$\text{Valeur moyenne de } f \text{ sur } [a; b] : \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $] -\infty; +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$