

Primitives

1 Définition

Définition 1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée est f .

Abus de langage : On dit que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur I .

Exemple 1 Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x$. Alors F définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ est une primitive de f sur \mathbb{R} .

On aurait pu choisir F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = x^2 + 1$ ou $F(x) = x^2 - \pi$ ou plus généralement $F(x) = x^2 + C$ où C est une constante réelle quelconque.

Théorème 1 Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur l'intervalle I , alors

$$\forall x \in I : G(x) = F(x) + C$$

où C est une constante réelle.

Théorème 2 Parmi les primitives de f sur I il en existe une et une seule qui vérifie $F(x_0) = y_0$ avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Théorème 3 Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Remarque 1 Il existe des fonctions non dérivables sur un intervalle qui admettent des primitives.

2 Primitives usuelles

Du tableau de dérivation des fonctions usuelles, on déduit le tableau suivant (C désigne une constante réelle quelconque) :

Fonction	Primitives	Intervalle de validité
0	C	\mathbb{R}
λ (constante)	$\lambda x + C$	\mathbb{R}
x	$\frac{x^2}{2} + C$	\mathbb{R}
x^n (n entier positif)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	\mathbb{R}
x^n (n entier négatif, $n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	\mathbb{R}_+^*
$\sin x$	$-\cos x + C$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x + C$	\mathbb{R}
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	tout intervalle ne contenant pas $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Théorème 4 Si F et G sont respectivement deux primitives de f et g sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$:

$F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I

λF est une primitive de λf sur I

Exemple 2 Si $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ alors $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}$ est une primitive de $f(x)$ sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^*

Exemple 3 Si $f(x) = 3 \sin x$ alors $F(x) = -3 \cos x$ est une primitive de $f(x)$ sur \mathbb{R}

3 Dérivation d'une fonction composée

Théorème 5 Si u est dérivable en x_0 et f dérivable en $f(x_0)$ alors $f \circ u$ est dérivable en x_0 et

$$(f \circ u)'(x_0) = f' \circ u(x_0) \cdot u'(x_0)$$

On a donc : sur tout intervalle convenablement choisi : $(f \circ u)' = (f' \circ u) \cdot u'$

On en déduit les résultats suivants :

1. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ sur tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas.
2. Si n est un entier strictement positif :
 - (a) $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ sur tout intervalle où u est dérivable.
 - (b) $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n u^{n-1} u'}{u^{2n}} = -n \frac{u'}{u^{n+1}}$ sur tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas.
3. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ sur tout intervalle où u est dérivable et est strictement positive.

Remarque 2 Dans tous les examinés ci-dessus, on obtient la même formule avec successivement $n = -1$, n entier strictement positif, n entier strictement négatif, $n = \frac{1}{2}$:

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

Autres conséquences de la formule $(f \circ u)' = (f' \circ u) \cdot u'$:

Sur tout intervalle où u est dérivable : $(\sin u)' = u' \cos u$ et $(\cos u)' = -u' \sin u$

En particulier :

$$\begin{aligned} (\sin(ax+b))' &= a \cos(ax+b) \\ (\cos(ax+b))' &= -a \sin(ax+b) \end{aligned}$$

Sur tout intervalle où u est dérivable et prend des valeurs différentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$(\tan u)' = u' (1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

En particulier :

$$(\tan(ax+b))' = a (1 + \tan^2(ax+b)) = \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$$

4 Autres primitives

Du paragraphe précédent on déduit le tableau suivant :

Dans le tableau ci dessous, C désigne une constante réelle, u désigne une fonction.

L'intervalle I sera à déterminer (un intervalle où la fonction est dérivable et où la primitive est définie).

Fonction	Primitives	Intervalle de validité
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	I^*
$\frac{1}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	I_+^*
$u' \cdot u^n$ (n entier positif)	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	I
$u' \cdot u^n$ (n entier négatif $n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	I^*
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$	\mathbb{R}
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$	\mathbb{R}
$1 + \tan^2(ax + b) = \frac{1}{\cos^2(ax + b)}$	$\frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$	J

Dans ce tableau :

C désigne une constante réelle quelconque.

I désigne tout intervalle où u est dérivable.

I^* désigne tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas.

I_+^* désigne tout intervalle où u est dérivable et est strictement positive.

J désigne tout intervalle ne contenant pas de réel x tel que $ax + b = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.