

# Nombres complexes

## 1 Nombres complexes

### 1.1 Forme algébrique

**Définition 1** Un nombre complexe est un nombre qui s'écrit sous la forme  $a + ib$  avec  $a$  et  $b$  réels et où  $i$  est un nombre imaginaire tel que  $i^2 = -1$ .

On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes. L'addition et la multiplication dans  $\mathbb{C}$  comportent les mêmes règles de calcul que dans  $\mathbb{R}$  en tenant compte du fait que  $i^2 = -1$ .

L'écriture  $z = a + ib$  est la forme algébrique de  $z$ .

$a$  est la partie réelle de  $z$ ,  $b$  est la partie imaginaire de  $z$ . On note  $a = \Re(z)$  et  $b = \Im(z)$

Tout complexe  $z$  tel que  $b = 0$  s'écrit  $z = a$ . C'est un nombre réel

Tout complexe  $z$  tel que  $a = 0$  s'écrit  $z = ib$ . C'est un nombre imaginaire pur.

**Exercice 1** On pose  $z_1 = 1 + 2i$  et  $z_2 = 2 - i$ .

Calculer sous forme algébrique  $z_1 + z_2$  ;  $z_1 z_2$  ;  $\frac{z_1}{z_2}$  et  $2z_1 + 3z_2$

**Exercice 2** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

1.  $z + 2 = i(z - 1)$
2.  $iz - 3 = 2i$

### 1.2 Représentation géométrique

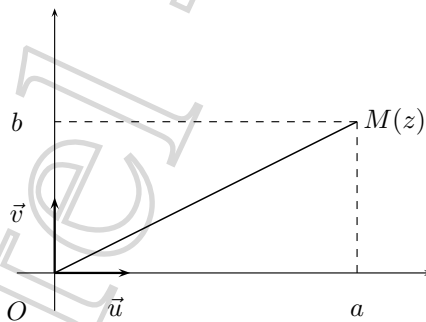
Le plan complexe est le plan muni du repère **orthonormal direct**  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $z = a + ib$

- $M(a; b)$  est l'image du complexe  $z = a + ib$

De même  $\overrightarrow{OM}$  est le vecteur image de  $z = a + ib$

- $z = a + ib$  est l'affixe du point  $M$  ou du vecteur  $\overrightarrow{OM}$

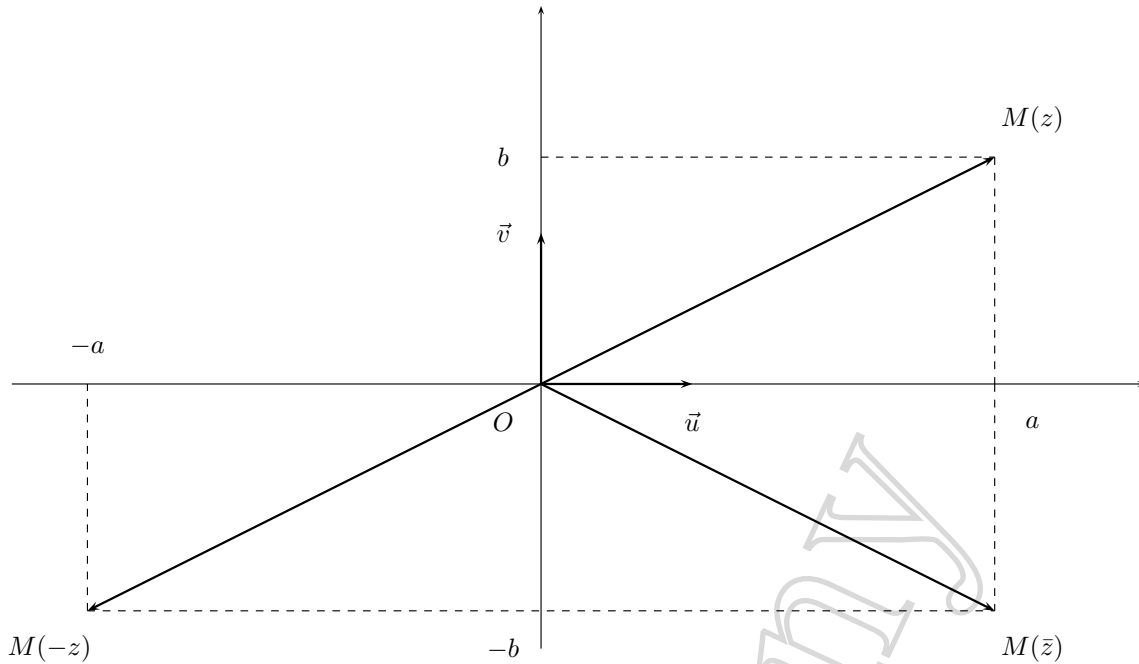


### 1.3 Conjugué d'un complexe

**Le conjugué du complexe  $z = a + ib$  est le complexe  $\bar{z} = a - ib$**

L'image de  $\bar{z}$  est le symétrique de l'image de  $z$  par rapport à l'axe des abscisses (axe des réels)

L'image de  $-z$  est le symétrique de l'image de  $z$  par rapport à l'origine du repère  $O$



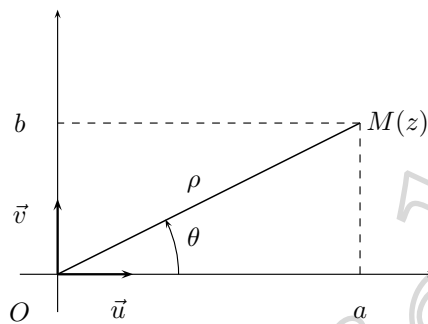
**Propriétés**

$\bar{\bar{z}} = z$	$z\bar{z} = a^2 + b^2$	$z + \bar{z} = 2\Re(z)$	$z - \bar{z} = 2\Im(z)$
$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$	$\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$	si $z_2 \neq 0 : \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$	

**1.4 Module et argument - Forme trigonométrique**

**Définition 2** Soit  $z = a + ib$  un complexe d'image  $M$ .  
Le module de  $z$ , noté  $|z|$ , est la norme du vecteur  $\overrightarrow{OM}$

Si  $z \neq 0$ , un argument de  $z$ , noté  $\arg(z)$ , est une mesure en radian, de l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$



$$z = a + ib$$

$$\rho = |z| = OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$$

$$a = \rho \cos \theta$$

$$b = \rho \sin \theta$$

**Remarque 1** Si  $\theta$  est un argument de  $z$  alors tout nombre qui s'écrit  $\theta + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  est un argument de  $z$ .

On note  $\arg(z) = \theta [2\pi]$

**Exercice 3** Soit  $z = -1 + i$ . Calculer module et argument de  $z$ .

**Propriétés**

- $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = 0 [2\pi]$  ou  $\arg(z) = \pi [2\pi]$
- $|-z| = |z|$  et si  $z \neq 0 : \arg(-z) = \pi + \arg(z) [2\pi]$
- $|\bar{z}| = |z|$  et si  $z \neq 0 : \arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$

Soit  $z = a + ib$ . Si on pose  $\rho = |z| = \|\overrightarrow{OM}\|$  et  $\theta = \arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$  alors :

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

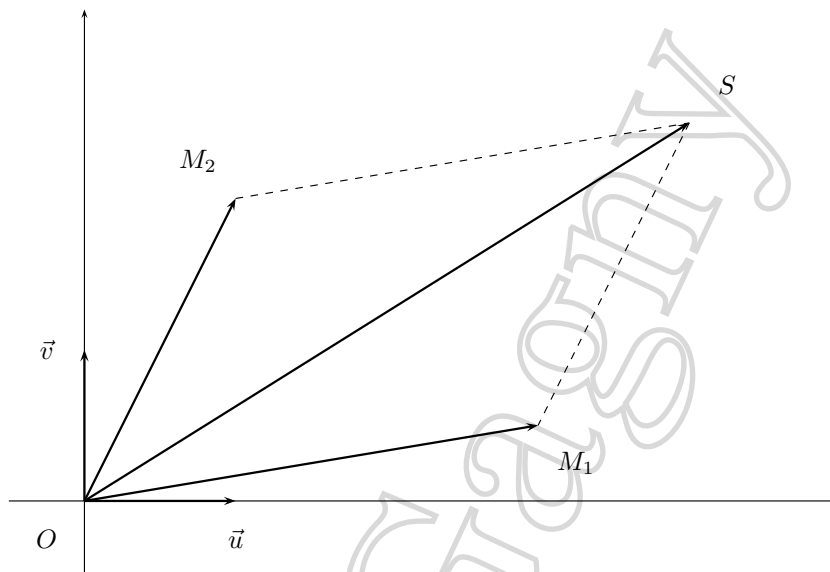
C'est la forme trigonométrique de  $z$  que l'on peut noter de manière condensée :  $[\rho; \theta]$   
 Si  $z \in \mathbb{C}^*$ , on a les relations suivantes :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ; \quad a = \rho \cos \theta \quad \text{et} \quad b = \rho \sin \theta$$

On en déduit :  $\cos \theta = \frac{a}{\rho}$  et  $\sin \theta = \frac{b}{\rho}$  relations permettant de déterminer  $\theta$  à  $2k\pi$  près.

## 2 Opérations

### 2.1 Somme et différence



Si  $z_1$  a pour image  $M_1$  et si  $z_2$  a pour image  $M_2$  alors  $z_1 + z_2$  a pour image  $S$  tel que  $\vec{OS} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2}$   
 Dans le triangle  $OM_1S$  on a :  $OS \leq OM_1 + M_1S$  et comme  $M_1S = OM_2$  on en déduit :  $OS \leq OM_1 + OM_2$   
 d'où :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

C'est l'inégalité triangulaire.

On a également :  $z_1 - z_2$  a pour image  $D$  tel que  $\vec{OD} = \vec{OM_1} - \vec{OM_2} = \vec{M_2M_1}$  d'où le résultat fondamental :  
 Si  $A$  et  $B$  ont pour affixes respectivement  $z_A$  et  $z_B$  alors :

$$AB = \|\vec{AB}\| = |z_B - z_A| \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A) [2\pi]$$

**Exercice 4** Dans le plan complexe muni du repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on donne le point  $A$  d'affixe  $z_A = -3 + i$  et le point  $B$  d'affixe  $z_B = -2 + 2i$

Calculer la distance  $AB$ , l'affixe du milieu  $I$  de  $[AB]$  et une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \vec{AB})$

### 2.2 Produit

**Théorème 1**  $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$  et  $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$

**Exercice 5** Démontrer le résultat du théorème.

### 2.3 Quotient

**Théorème 2** Si  $z \neq 0$  :  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$  et  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]$

**Exercice 6** Démontrer le résultat du théorème.

**Corollaire 1** Si  $z_2 \neq 0$  :  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  et  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$

**Exercice 7** Démontrer le résultat du corollaire.

**Exercice 8** Démontrer que si  $z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$  sont respectivement les affixes des points  $A, B, C$  et  $D$

$$\left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right) = \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} [2\pi]$$

**Exercice 9** Dans le plan complexe muni du repère orthonormal  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on donne les points  $A, B, C, D$  d'affixes respectives  $z_A = -1 + i, z_B = 1 + 2i, z_C = 2$  et  $z_D = -i$ .  
Calculer une mesure de chacun des angles  $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$  ;  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$  et  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})$

### 3 Notation exponentielle

**Théorème 3** Pour tout complexe  $z \neq 0$  et pour tout entier relatif  $n$  :

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi]$$

**Corollaire 2**  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$  (Formule de De Moivre)

**Définition 3** Pour tout réel  $\theta$ , on note  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$   
 $e^{i\theta}$  est donc le complexe de module 1 et d'argument  $\theta$ .

Tout complexe  $z$  **non nul** de module  $\rho$  et d'argument  $\theta$  peut s'écrire  $z = \rho e^{i\theta}$

L'écriture  $z = \rho e^{i\theta}$  est la notation exponentielle de  $z$  (on dit aussi forme exponentielle).

**Propriétés**

$$\begin{aligned} \rho_1 e^{i\theta_1} \times \rho_2 e^{i\theta_2} &= \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} & \text{Si } n \in \mathbb{Z} : (\rho e^{i\theta})^n &= \rho^n e^{in\theta} \\ \text{Si } \rho_2 \neq 0 : \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} & \text{Si } \rho \neq 0 : \frac{1}{\rho e^{i\theta}} &= \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} \end{aligned}$$

De  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  on déduit  $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$  et les formules suivantes :

**Formules d'Euler :**

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

**Exercice 10** Ecrire la formule de Moivre pour  $n = 2$ .

Développer  $(\cos \theta + i \sin \theta)^2$  et retrouver les formules de trigonométrie :

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

**Exercice 11** Mettre sous forme exponentielle les complexes  $z_1 = \sqrt{3} + i$  et  $z_2 = 2i$ .

En déduire la forme exponentielle puis la forme algébrique de  $z_1 \times z_2$

Calculer directement la forme algébrique de  $z_1 \times z_2$

**Exercice 12** En utilisant les formules d'Euler, linéariser  $(\sin x)(\cos 3x)$ .

### 4 Transformations géométriques

**4.1 Transformation définie par  $z \mapsto z + a$  où  $a \in \mathbb{C}$**

Si, dans le plan complexe,  $M$  est l'image de  $z$  et  $A$  l'image de  $a$  et si on note  $M'$  l'image de  $z' = z + a$  alors :

$$z' = z + a \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow M' = \underset{OA}{\xrightarrow{t}}(M)$$

**Théorème 4** Soit  $a \in \mathbb{C}$  et soit  $A$  l'image de  $a$  dans le plan complexe.

La transformation qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = z + a$  est la translation de vecteur  $\overrightarrow{OA}$

## 4.2 Transformation définie par $z \mapsto e^{i\theta} z$

Si on note  $M'$  l'image de  $z' = ze^{i\theta}$  alors :  $|z'| = |ze^{i\theta}| = |z| |e^{i\theta}| = |z|$  et  $\arg(z') = \arg(z) + \arg(e^{i\theta}) = \arg(z) + \theta \pmod{2\pi}$

D'où  $OM' = OM$  et  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + \theta \pmod{2\pi}$  soit  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \pmod{2\pi}$  d'où :

**Théorème 5** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . La transformation qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z' = ze^{i\theta}$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$

**Exercice 13** Dans le plan complexe, on donne le point  $A$  d'affixe  $z_A = -3 + i$  et le point  $B$  d'affixe  $z_B = 1 + 2i$ .

Soit  $t$  la translation de vecteur  $\vec{V}$  de coordonnées  $(2; 3)$ .

- Déterminer les affixes des points  $A'$  et  $B'$  images respectives de  $A$  et  $B$  par la translation  $t$ .
- Quelle est la nature du quadrilatère  $ABB'A'$  ?

**Exercice 14** Dans le plan complexe, on donne le point  $A$  d'affixe  $z_A = -3 + i$  et le point  $B$  d'affixe  $z_B = 1 + 2i$ .

- Construire les images respectives  $A'$  et  $B'$  des points  $A$  et  $B$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$
- Déterminer les affixes des points  $A'$  et  $B'$ .

## 5 Equations du second degré

Soit  $a, b, c$  trois réels avec  $a \neq 0$  et soit l'équation  $az^2 + bz + c = 0$ .

On note  $\Delta = b^2 - 4ac$

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0 \Leftrightarrow \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] = 0$$

On a vu en première que si  $\Delta \geq 0$ , l'équation a deux racines réelles (éventuellement confondues si  $\Delta = 0$ ) :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{De plus, si } \Delta < 0 : \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 = \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right] \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right]$$

On en déduit que si  $\Delta < 0$ , l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

**Exercice 15** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

- $z^2 + 2z + 2 = 0$
- $3z^2 - 4z + 4 = 0$
- $25z^2 - 14z + 25 = 0$