

# Etude d'une fonction rationnelle

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

et soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  unités : 1cm sur l'axe des abscisses ; 5 mm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de cet ensemble.
3. Dédire de la question précédente une asymptote  $\mathcal{D}$  à  $\mathcal{C}$ .
4. Etudier les variations de  $f$ .
5. Déterminer les réels  $a, b, c$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} : f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$$

6. Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x + 2$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  vers  $+\infty$  et vers  $-\infty$ .
7. Etudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et de  $\Delta$ .
8. Déterminer le coefficient directeur de la tangente  $\mathcal{T}_1$  à  $\mathcal{C}$  au point  $A$  d'abscisse 0.
9. Déterminer une équation de la tangente  $\mathcal{T}_2$  à  $\mathcal{C}$  au point  $B$  d'abscisse 1.
10. Déterminer tous les points de  $\mathcal{C}$  ayant une tangente parallèle à  $\mathcal{T}_1$ .
11. Montrer que le point  $\Omega(2; 4)$  est centre de symétrie de  $\mathcal{C}$ .
12. Déterminer les points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec les axes de coordonnées.
13. Tracer  $\mathcal{D}$ ,  $\Delta$ ,  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{T}_2$  et  $\mathcal{C}$ .